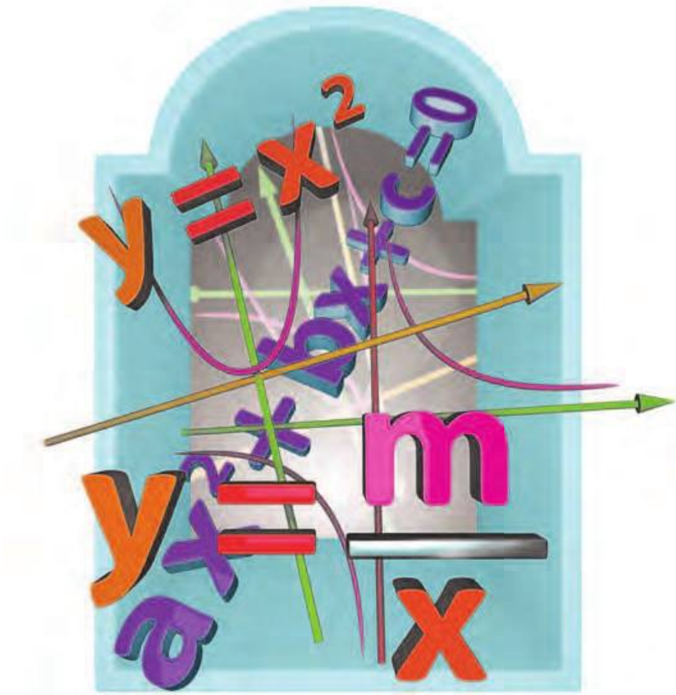
Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

А.Г. Рубин, П.В. Чулков

АЛГЕБРА

8 класс



Москва
БАЛАСС
2015

УДК 373.167.1:51
ББК 22.14я72
Р82

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

Совет координаторов предметных линий Образовательной системы «Школа 2100» – лауреат премии Правительства РФ в области образования за теоретическую разработку основ образовательной системы нового поколения и её практическую реализацию в учебниках

На учебник получены положительные заключения по результатам научной экспертизы (заключение РАН от 14.10.2011 № 10106-5215/820), педагогической экспертизы (заключение РАН от 24.01.2014 № 000366) и общественной экспертизы (заключение НП «Лига образования» от 30.01.2014 № 173)

Руководитель издательской программы –
член-корр. РАО, доктор пед. наук, проф. *Р.Н. Бунеев*

Рубин, А.Г.

Р82 **Алгебра. 8 кл.:** учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность / А.Г. Рубин, П.В. Чулков. – М. : Баласс, 2015. – 240 с.: ил. (Образовательная система «Школа 2100»).

ISBN 978-5-85939-928-4

Учебник «Алгебра» для 8 класса соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования. Является продолжением непрерывного курса математики и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

Может использоваться как учебное пособие.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-85939-928-4

КАК РАБОТАТЬ С УЧЕБНИКОМ

Дорогие ребята!

Перед вами учебник алгебры для 8-го класса, написанный Александром Григорьевичем Рубиным и Павлом Викторовичем Чулковым. Этот учебник входит в систему учебников Образовательной системы «Школа 2100». Так же, как и другие учебники этой системы, он поможет вам в развитии умений (действий), которые необходимы в жизни.

Напоминаем, что эти умения, или действия (они называются универсальными), развиваются через специальные задания, обозначенные в учебнике кружками и фоном условных знаков разного цвета. Каждый цвет соответствует определённой группе умений:

- организовывать свои действия: ставить цель, планировать работу, действовать по плану, оценивать результат;
- работать с информацией: самостоятельно находить, осмысливать и использовать её;
- общаться и взаимодействовать с другими людьми, владеть устной и письменной речью, понимать других, договариваться, сотрудничать.

Так обозначены задания, где нужно применить разные группы умений, мы называем их жизненными задачами и проектами.

Зачем мы будем учиться?

Изучая алгебру в 8-м классе, вы познакомитесь с новыми видами буквенных выражений: дробными и иррациональными, научитесь выполнять их преобразования, решать квадратные уравнения, а также сводящиеся к ним рациональные уравнения и системы уравнений, моделировать с их помощью многие реальные ситуации, более глубоко, чем ранее, познакомитесь с элементами математической статистики.

Это поможет вам стать увереннее в себе, добиться успехов при решении возникающих в жизни задач, так как при этом очень часто придётся иметь дело с перечисленными выше видами деятельности.

Задания на развитие предметных умений в учебнике обозначены серым цветом.

Как мы будем учиться?

Для успешного изучения алгебры и овладения универсальными учебными действиями на уроках открытия нового знания используется проблемный диалог (образовательная технология).

Структура параграфа, где вводится новый материал, имеет в учебнике следующий вид.

Вспоминаем то, что знаем

Так обозначены вопросы, задания и упражнения по изученному материалу, который необходим для открытия нового знания.

Открываем новые знания

Ученики, проводя наблюдения, ищут решение и формулируют свои предположения о том, как решается данная задача, формулируют ответы на поставленные в учебнике вопросы.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Ученики читают, анализируют текст учебника, сопоставляют его со своими предположениями, проверяют правильность своих ответов на вопросы и сделанных на их основании выводов.

Развиваем умения

Это задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности.

Н **Необходимый уровень.** Эти задания должны уметь выполнять все учащиеся. Они помогут вам определить, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.

П **Повышенный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят расширить свои знания. Они требуют более глубокого усвоения учебного материала, для их решения, наряду с известными приёмами и идеями, может понадобиться выдвижение некоторой новой идеи.

М **Максимальный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные, нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом **выполнение всех заданий не является обязательным ни на одном из уровней**, они выбираются в соответствии с возможностями и потребностями учащихся под руководством педагога.

В конце учебника приводятся ответы примерно к половине заданий.

В некоторых параграфах новый материал сообщается без использования проблемных ситуаций.

Знакомимся с новой темой

Ученики читают и анализируют текст учебника, делают выводы.

Ориентироваться в учебнике вам помогут условные обозначения


Проблемный вопрос.

Это нужно запомнить.


Работа в группе (паре).


Задание с использованием информационных технологий.


Самостоятельная исследовательская работа.

Жизненные задачи и проекты

Помимо обычных учебных заданий разного уровня сложности, в учебник включены жизненные задачи и проекты. Ими можно заниматься в свободное от уроков время в группах или индивидуально.

Что такое жизненная задача?

Жизненная задача — это модель реальной ситуации, для разрешения которой необходим набор математических знаний, к этому моменту вам уже в основном известных. При этом жизненная задача отличается от привычных всем школьных учебных задач. Для её решения вам может понадобиться дополнительная информация, которую придётся добывать самим, причём какая именно информация нужна, вы должны решать сами и самостоятельно искать источники этой информации. В случае затруднений вы можете обратиться к старшим товарищам, учителю или другим взрослым.

В условии жизненной задачи могут содержаться избыточные данные. Ведь в жизни чаще всего так и бывает: когда пытаешься разобраться в ситуации и анализируешь, что тебе о ней известно, то в ходе анализа постепенно выясняется, что далеко не вся эта информация пригодится, значительная её часть не имеет отношения к делу. Кроме того, для решения жизненной задачи будут необходимы знания не только из области математики, но и других изучаемых вами областей (как это и происходит в реальной жизни). Систематическое решение жизненных задач даст вам возможность не только углубиться в математику, увидеть её взаимосвязь с другими областями знаний, но и совершенствовать умение самостоятельно работать с информацией.

Жизненные задачи, как принято в учебниках Образовательной системы «Школа 2100», оформлены следующим образом.

СИТУАЦИЯ. Условия, в которых возникла проблема.

ВАША РОЛЬ. Человек, в роли которого вы должны себя представить, решая проблему.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Более подробная характеристика ситуации.

ЗАДАНИЕ. Что нужно сделать или что нужно получить в итоге.

Что такое проект?

Это любое самостоятельное дело, которое предполагает

1) оригинальный замысел (цель);

2) выполнение работы за определённый отрезок времени;

3) конкретный результат, представленный в итоге (мероприятие, решение проблемы, результат самостоятельных исследований и др.).

Проектная деятельность помогает научиться работать в команде, распределять роли так, чтобы эффективно использовать сильные стороны каждого, участвовать в мозговых штурмах и других формах коллективной интеллектуальной деятельности, представлять результаты своего труда в форме доклада, презентации, инсценировки и т. д. Предполагается, что проекты выполняются в свободное от уроков время. Они не являются обязательными.

Структура учебника

Учебник разбит на главы, а каждая глава — на параграфы. Каждый параграф обозначается двумя числами: число слева от точки — номер главы, а справа от точки — номер параграфа в этой главе. В каждой главе рассматривается своя тема, а в каждом параграфе — отдельные вопросы этой темы.

Задания на повторение пройденного материала не даются после каждого параграфа или главы, а собраны в конце учебника, после последней, шестой главы. Там приведено большое количество заданий для повторения, и это даст учителю возможность наиболее эффективно, исходя из особенностей класса, а также с учётом индивидуальной образовательной траектории каждого ученика организовать этот важнейший в обучении вид деятельности.

Работая по нашему учебнику, вы не только узнаете много нового, не только научитесь решать большое количество разнообразных математических задач, но и приобретёте важнейшее умение — учиться самостоятельно:

- ставить учебную цель;
- планировать своё движение к цели и действовать по плану;
- оценивать результаты своего труда.

ГЛАВА I РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1.1 Дробные алгебраические выражения

Знакомимся с новой темой

На уроках алгебры в 7-м классе вы работали с алгебраическими выражениями и знаете, что алгебраические выражения бывают целыми и дробными.

Целым алгебраическим выражением называется такое алгебраическое выражение, которое содержит только операции сложения, вычитания и умножения (при этом произведение нескольких одинаковых сомножителей может быть записано в виде степени с натуральным показателем), а действие деления либо отсутствует вообще, либо является делением на действительное число, отличное от нуля.

Можно сказать короче: в целом алгебраическом выражении нет деления на буквенное выражение.

Например, целыми алгебраическими выражениями (или, для краткости, просто *целыми выражениями*) являются:

$$3a(b-2); \quad \frac{7x+5}{6}; \quad 7m^3-5mn^2+m-5; \quad 4q(p+q)-(p^2-pqr).$$

Алгебраические выражения, содержащие деление на буквенное выражение, называются *дробными алгебраическими выражениями*.

Например, дробными алгебраическими выражениями (или, для краткости, просто *дробными выражениями*) являются:

$$\frac{x-1}{x-2}; \quad 5abc-2:(3b-c+1); \quad x^2+4x+3+\frac{1}{x}; \quad \frac{2y}{y-x}-\frac{9}{2y}.$$

Общее название для целых и дробных алгебраических выражений — *рациональные алгебраические выражения*. К их подробному изучению мы и приступаем.

Вспомните, что на уроках алгебры в 7-м классе вы сначала изучили одночлены и многочлены. После того как вы научились обращаться с ними, было установлено, что любое целое выражение может быть преобразовано в многочлен стандартного вида.

Начиная систематически заниматься дробными алгебраическими выражениями, мы сначала научимся работать с наиболее простыми из них — *алгебраическими дробями* (или, по-другому, *рациональными дробями*).

Алгебраической дробью называется дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены стандартного вида. Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{a-3}{3a+1}; \quad \frac{2x+7y}{x^2-xy-2y^2}; \quad \frac{5mn+7nk}{4}; \quad \frac{4}{9}.$$

К алгебраическим дробям относят также дроби, числитель и знаменатель которых — действительные числа (понятно, что знаменатель должен быть отличен от нуля).

Обратите внимание, что некоторые из выписанных алгебраических дробей являются целыми алгебраическими выражениями, например $\frac{5mn+7nk}{4}$ и $\frac{4}{9}$. Это такие алгебраические дроби, знаменатель которых — многочлен нулевой степени, т. е. действительное число, отличное от нуля.

Алгебраическое выражение $\frac{5x-1}{(x+2)(x-3)}$ является дробным, но его знаменатель не является многочленом стандартного вида, значит, согласно приведённому выше определению, это выражение не является алгебраической дробью. В то же время знаменатель, являющийся произведением двух многочленов, можно преобразовать в многочлен стандартного вида: $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$, в результате чего выражение $\frac{5x-1}{(x+2)(x-3)}$ можно будет записать в виде $\frac{5x-1}{x^2-x-6}$, т. е. в виде алгебраической дроби. Поэтому, допуская вольность речи, выражения вида $\frac{5x-1}{(x+2)(x-3)}$ иногда тоже называют алгебраическими дробями.

После того как мы научимся работать с алгебраическими дробями, мы установим, что любое рациональное выражение может быть преобразовано к алгебраической дроби или многочлену. Впрочем, многочлен тоже можно считать частным случаем алгебраической дроби. Например:

$$x^2+4x-5=\frac{x^2+4x-5}{1}; \quad \frac{5}{6}ab-\frac{3}{8}c=\frac{20ab-9c}{24} \text{ и т. д.}$$

Вы также знаете, что если в буквенное алгебраическое выражение вместо букв подставить числа, то получится числовое выражение. Значение этого числового выражения называется значением буквенного выражения при выбранных значениях букв.

Например, значение буквенного выражения $2x^2-19$ при $x=3$ равно значению числового выражения $2\cdot 3^2-19$, т. е. -1. Значение буквенного выражения $\frac{3a+8b}{a-2b}$ при $a=4$ и $b=0{,}5$ равно значению числового выражения $\frac{3\cdot 4+8\cdot 0{,}5}{4-2\cdot 0{,}5}$, т. е. $\frac{16}{3}$.

Ясно, что числовое выражение, в которое превращается буквенное выражение при заданных значениях букв, должно иметь смысл. Это значит, что в этом числовом выражении не должно быть деления на нуль.

Для целого алгебраического выражения ситуация деления на нуль не могла возникнуть ни при каких значениях входящих в него букв — ведь если в нём и содержится некоторое количество действий деления, то каждый раз это деление на ненулевое действительное число.

Другими словами, целое алгебраическое выражение имеет смысл при всех значениях входящих в него букв.

Для дробного алгебраического выражения это уже не обязательно так.

Например, дробное буквенное выражение $\frac{3x+4}{x-2}$ не имеет смысла (или, по-другому, не определено) при $x=2$. Можно сказать и так: выражение $\frac{3x+4}{x-2}$ имеет смысл при всех действительных значениях x, кроме $x=2$. Или ещё короче: при всех $x \neq 2$.

Значения букв, при которых определено буквенное алгебраическое выражение, называются *допустимыми значениями букв*.

Так, разобранный выше пример позволяет сказать, что допустимые значения букв в выражении $\frac{3x+4}{x-2}$ — это $x \neq 2$.

Найдём допустимые значения букв в выражении $\frac{2a^2-ab-b^2}{a-2b}$. Выражение имеет смысл при $a-2b \neq 0$, или при $a \neq 2b$.

Если дробей в алгебраическом выражении несколько, то условия, задающие допустимые значения букв, могут записываться более громоздко.

Например, для дробного выражения $\frac{x+y}{x+3}-\frac{2x-y^2}{y-5}+\frac{5}{3x-7y^2}$ допустимыми являются значения букв, задаваемые условиями: $x \neq -3$, $y \neq 5$, $3x-7y^2 \neq 0$.

Не всегда условие, задающее допустимые значения букв, может быть упрощено. Например, допустимые значения букв в выражении $\frac{2x+1}{x^5-3x-1}$ задаются условием $x^5-3x-1 \neq 0$, которое мы не умеем записывать в более простом виде.

Из курса алгебры 7-го класса вы помните, что равенство между двумя целыми алгебраическими выражениями называется тождеством, если оно верно при всех значениях входящих в него букв, а два целых алгебраических выражения называются тождественно равными, если равны их числовые значения при всех значениях входящих в них букв.

Для дробных алгебраических выражений эти определения не годятся, так как могут быть такие значения букв, при которых дробные выражения не имеют смысла. Поэтому мы уточним определение тождества таким образом, чтобы оно оставалось приемлемым для целых алгебраических выражений и в то же время подходило бы и для дробных.

Равенство между двумя алгебраическими выражениями называется тождеством, если оно верно *при всех допустимых значениях входящих в него букв*, а два целых алгебраических выражения называются тождественно равными, если равны их числовые значения *при всех допустимых значениях входящих в них букв*.

Если выписана цепочка равенств между алгебраическими выражениями, в которой каждое следующее выражение тождественно равно предыдущему, то говорят, что выполнено *тождественное преобразование* начального выражения в конечное. В результате начальное выражение тождественно равно конечному выражению.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.
а) Алгебраическое выражение называется целым, если … .
б) Алгебраическое выражение называется дробным, если … .
в) Алгебраическое выражение называется рациональным, если … .

2 а) Что называется алгебраической дробью?
б) Какое другое название имеет алгебраическая дробь?
в) Может ли алгебраическая дробь быть целым алгебраическим выражением?
г) Является ли алгебраической дробью $\frac{13}{17}$?

3 Запишите соответственные буквенные выражения:
а) частное выражений a и $a+b$;
б) частное квадрата суммы x и y и куба разности x и y;
в) разность величины, меньшей p в q раз, и величины, меньшей q в p раз;
г) сумма частного выражений m и n и их утроенного произведения;
д) сумма частного a и числа 2 и произведения a и c;
е) произведение суммы fg и gh на частное выражений g и $g+f+h$.
Какие из записанных вами выражений являются дробными?

4 Найдите значения алгебраического выражения $\frac{3x-2}{x+3}$ при заданных значениях переменной:

а) $x=2$; в) $x=7$; д) $x=1$; ж) $x=-14$;
б) $x=\frac{3}{2}$; г) $x=-2{,}25$; е) $x=-\frac{7}{4}$; з) $x=2{,}5$.

5 Найдите значения алгебраического выражения $\frac{2p-3q}{p+4}$ при заданных значениях переменных p и q:

а) $p=2$; $q=2$;
б) $p=5$; $q=3$;
в) $p=-3$; $q=-2$;
г) $p=\frac{3}{4}$; $q=-\frac{5}{2}$;
д) $p=0{,}25$; $q=-0{,}23$;
е) $p=\frac{1}{4}$; $q=-\frac{3}{8}$;
ж) $p=0{,}3$; $q=0{,}2$;
з) $p=\frac{17}{13}$; $q=-\frac{35}{39}$.

Н

6 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значение выражения $\frac{3a-1}{2a}$ при указанных значениях a.

a	2	0,5	$-1{,}5$	11	$-\frac{5}{3}$	-9
$\frac{3a-1}{2a}$						

7 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значение выражения $\frac{s}{s+1}-\frac{s+1}{s}$ при указанных значениях s.

s	-2	0	2	$-12{,}5$	3,3	19
$\frac{s}{s+1}-\frac{s+1}{s}$						

8 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значение выражения $\frac{3x+2y}{x-y}$ при указанных значениях x и y.

x	2	4	5	$\frac{1}{3}$	0,27	$-\frac{2}{9}$
y	3	-1	-7	$-0{,}5$	0,21	$\frac{3}{7}$
$\frac{3x+2y}{x-y}$						

9 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значение выражения $\frac{m+2n}{n+3}+\frac{n-m}{m+n}$ при указанных значениях m и n.

m	0,5	20	7	-5	$\frac{1}{5}$	$-1{,}17$
n	0,7	20	5	-7	$\frac{-3}{25}$	0,002
$\frac{m+2n}{n+3}+\frac{n-m}{m+n}$						

10 Определите, при каких значениях переменной выражение не имеет смысла:

а) $\dfrac{a-2}{a-2}$;

б) $\dfrac{r}{2}-\dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{1+r}{1-r}$;

в) $\dfrac{5x+7}{6x-4}$;

г) $\dfrac{s}{2s-5}\cdot\dfrac{5s-1}{7s-3}$;

д) $\dfrac{u}{u-1}+\dfrac{u-1}{2u+1}+\dfrac{2u+1}{3u-1}$;

е) $\dfrac{11p+123}{19p+133}$.

11 Определите, при каких значениях букв выражение имеет смысл:

а) $\dfrac{5s-2+t}{(s+2)(t-1)}$;

б) $\dfrac{-3+6g-2i}{8g-3}$;

в) $\dfrac{2q+pq-q}{7q-11}$;

г) $\dfrac{u+2v}{3u+6}$;

д) $\dfrac{x-y}{2x-6}$;

е) $\dfrac{w^2-2w+1}{4w-16}$.

12 Найдите все допустимые значения букв:

а) $\dfrac{mnk}{(m+1)(n+2)(k+3)}$;

б) $\dfrac{5}{x}+x$;

в) $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{y+3}$;

г) $\dfrac{u}{u-1}\left(z-\dfrac{z+1}{z-2}\right)$;

д) $\dfrac{a}{a^2+1}$;

е) $\dfrac{s-1}{s-3}\cdot\dfrac{s-3}{s-5}\cdot\dfrac{s-5}{s-7}\cdot\dfrac{s-7}{s-1}$;

ж) $\dfrac{1}{g+2}\left(g-\dfrac{1}{g}\right)\left(2g-\dfrac{g+2}{3g-7}\right)$;

з) $\dfrac{s+2}{s-1}\cdot\dfrac{s-1}{s+2}$.

13 Запишите алгебраическое выражение, с помощью которого можно найти указанную величину:

а) скорость велосипедиста, который за t ч проехал расстояние S км;

б) производительность рабочего, который за t мин сделал N деталей;

в) доля отличников в классе из m учащихся, если в нём k учащихся не отличники;

г) площадь основания дома высотой H м и объёмом V м^3;

д) периметр прямоугольника с одной стороной a мм и площадью S мм^2;

е) разность скоростей экспресса и электрички, если они проходят расстояние S км за время t ч и T ч соответственно.

14 Запишите буквенное выражение для нахождения нужной величины.

а) Пешеход прошёл сначала a км со скоростью x км/ч, а затем ещё b км со скоростью y км/ч. Сколько часов шёл пешеход?

б) Бассейн объёмом V л может наполняться водой через трубу со скоростью v л/мин, а сливать воду можно через люк со скоростью u л/мин. Сколько времени заняла смена воды в бассейне, если сначала воду полностью слили через люк, а затем наполнили новой водой через трубу?

в) Лодка движется из пункта A в пункт B против течения со скоростью v км/ч, после чего сразу же возвращается в пункт A. Сколько времени ей потребуется на это, если скорость течения u км/ч и расстояние между пунктами A и B равно S км?

г) Первую часть пути велосипедист проехал со скоростью n км/ч, а вторую часть — со скоростью m км/ч. С какой средней скоростью двигался велосипедист, если длина первой части пути R км, а длина второй части Q км?

П

15 Запишите буквенное выражение для нахождения нужной величины.

а) Первый работник изготавливает N деталей за время t, второй работник работает в k раз медленнее первого, третий в k раз быстрее первого, а четвёртый работает так же быстро, как первый и второй, вместе взятые. Какова средняя производительность этих работников?

б) На предприятии по производству яблочного сока работают 5 соковыжималок. Первая, работая одна, обрабатывает партию из N т яблок за A часов, вторая — за время, большее, чем первая, на 1 час, третья — за время, большее четвёртой в b раз, четвёртая — за время, равное сумме времени работы первой и второй, а пятая — за время, меньшее, чем первая, в c раз. За какое время эти 5 соковыжималок, работая вместе, обработают партию из M т яблок?

в) Сколько часов путник шёл путь длиной S км, если первую треть он прошёл со скоростью w км/ч, вторую треть — со скоростью, в 2 раза большей, а третью треть — со скоростью, меньшей скорости на первой трети пути в q раз?

16 Лодка, собственная скорость которой x км/ч, прошла S км против течения, сделала остановку на 30 мин., после чего вернулась назад в пункт отправления. Запишите выражение, показывающее, через сколько часов после отплытия из начального пункта лодка вернулась назад, если известно, что скорость течения равна y км/ч.

17 В 1 кг первого сплава меди и олова меди в A раз больше, чем олова, а в 1 кг второго сплава меди в B раз меньше, чем олова. Получили новый сплав, взяв для этого по 1 кг каждого из сплавов. Запишите выражение, показывающее, как относятся массы меди и олова в этом сплаве.

1.2 Алгебраические дроби

Вспоминаем то, что знаем

- Что такое числовая дробь?
- Сформулируйте условие равенства двух числовых дробей.
- Закончите предложение.
  Для числовых дробей равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ выполняется в том и только в том случае, когда... .
- Сформулируйте основное свойство дроби.
- Расскажите, как сократить числовую дробь. Всегда ли это возможно?
- Расскажите, как привести числовую дробь к новому знаменателю.

Открываем новые знания

- Как вы думаете, похожи ли свойства алгебраических дробей на известные вам свойства числовых дробей? Обоснуйте ваш ответ.

?! Как формулируются свойства алгебраических дробей, аналогичные сформулированным вами свойствам числовых дробей?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Напомним, что алгебраической дробью называется дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены стандартного вида. Иногда говорят короче: алгебраическая дробь — это частное двух многочленов.

Таким образом, алгебраическая дробь — это выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B — многочлены стандартного вида.

Допустимые значения букв для алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ задаются условием $B \neq 0$. Вы уже знаете, что иногда это условие удаётся записать в более простом виде, а иногда нет.

Основные свойства алгебраических дробей очень похожи на хорошо известные вам свойства числовых дробей, а иногда буквально совпадают с ними.

Вы помните из курса математики 5-го класса условие равенства двух числовых дробей.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ в том и только в том случае, когда $ad=bc$.

Разумеется, мы предполагаем, что $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Аналогично выглядит условие равенства двух алгебраических дробей.

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ в том и только в том случае, когда $AD = BC$.

Здесь A, B, C и D — многочлены стандартного вида, причём многочлены B и D — ненулевые.

Вы также помните из курса математики 5-го класса основное свойство числовых дробей.

Если числитель и знаменатель дроби одновременно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится дробь, равная данной.

Основное свойство дроби можно записать в виде:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \text{ где } b \neq 0, c \neq 0.$$

Аналогично формулируется основное свойство алгебраических дробей.

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби одновременно умножить или разделить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится алгебраическая дробь, равная данной.

Основное свойство алгебраической дроби можно записать в виде:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \text{ где } B \text{ и } C \text{ — ненулевые многочлены.}$$

Так же, как и для числовых дробей, основное свойство алгебраической дроби позволяет приводить дроби к новому знаменателю и выполнять сокращение дробей.

Для приведения алгебраической дроби к новому знаменателю сначала определяют добавочный множитель — такой многочлен, произведение которого с имеющимся знаменателем равно новому знаменателю. Скажем, приведём дробь $\frac{ab}{3c}$ к знаменателю $12bc^2$. Добавочным множителем в данном случае будет $4bc$, так как $12bc^2 = 3c \cdot 4bc$. Получим:

$$\frac{ab}{3c} = \frac{ab \cdot 4bc}{3c \cdot 4bc} = \frac{4ab^2c}{12bc^2}.$$

Приведём дробь $\frac{m-5n}{m+n}$ к знаменателю $(m+n)^2$. Добавочным множителем будет $(m+n)$. Получим:

$$\frac{m-5n}{m+n}=\frac{(m-5n)(m+n)}{(m+n)(m+n)}=\frac{m^2-4mn-5n^2}{(m+n)^2}=\frac{m^2-4mn-5n^2}{m^2+2mn+n^2}.$$

Заметим, что часто алгебраическую дробь, особенно в промежуточных преобразованиях, бывает удобно записывать, не приводя числитель или знаменатель (или и тот и другой) к стандартному виду. Скажем, вполне допустимо оставить дробь, которую мы преобразовывали выше, в виде $\frac{m^2-4mn-5n^2}{(m+n)^2}$.

Для сокращения алгебраической дроби её числитель и знаменатель раскладывают на множители и смотрят, нет ли среди них одинаковых. При делении числителя и знаменателя на общий множитель его принято зачёркивать. Сократим, к примеру, дробь $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$. Для разложения на множители числителя вынесем за скобки общий множитель x, а в знаменателе применим формулу разности квадратов. Получим:

$$\frac{x^2+2x}{x^2-4}=\frac{x\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=\frac{x}{x-2}.$$

При работе с алгебраическими дробями часто приходится иметь дело со знаком «−» и полезно уметь записывать его наиболее удобным для нас образом, в наиболее удобном для нас месте. Это делается с помощью следующего свойства дроби.

$$\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}.$$

Например, при сокращении дроби $\frac{2p-3q}{3q-2p}$ можно поступить так:

$$\frac{2p-3q}{3q-2p}=\frac{2p-3q}{-(2p-3q)}=-\frac{2p-3q}{2p-3q}=-1.$$

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.

а) Алгебраической дробью называется ... .

б) Допустимые значения букв в алгебраической дроби — это ... .

в) Для приведения алгебраической дроби к новому знаменателю нужно ... .

2 а) Сформулируйте условие равенства двух алгебраических дробей.
б) Сформулируйте основное свойство алгебраической дроби.

3 Приведите дроби к указанным знаменателям:

а) $\frac{xy^3}{3z}$ к знаменателю $6xyz$;

б) $\frac{9p^3}{w^2y}$ к знаменателю $2psw^2y^2$;

в) $\frac{4s^3}{jz}$ к знаменателю $9jzt$;

г) $\frac{9b^2u^3}{cp^2}$ к знаменателю $7c^2p^2x$;

д) $\frac{bl^2}{mt}$ к знаменателю $-2mty$;

е) $\frac{2d}{9j}$ к знаменателю $3jy^2$;

ж) $\frac{3h^2}{8ag}$ к знаменателю $4a^2g^3$;

з) $\frac{4k^2w^3}{3j^2}$ к знаменателю $27j^2$.

4 Приведите дроби к указанным знаменателям:

а) $\frac{ab-1}{a-1}$ к знаменателю $(a-1)^2$;

б) $\frac{f-4}{c(f-3)}$ к знаменателю $3c^3f^2-c^3f^3$;

в) $\frac{3u(l+u)}{5+4u^3}$ к знаменателю $10l+8lu^3$;

г) $\frac{a^2+a-1}{a^2+2a+1}$ к знаменателю $(a+1)^3$;

д) $\frac{9+4x}{3+8x}$ к знаменателю $-6xz^3-16x^2z^3$;

е) $\frac{8uz-7g^3}{2u^2+3z}$ к знаменателю $6g^2u^2z+9g^2z^2$.

5 Запишите выражение $5x-y$ в виде дроби со знаменателем:

а) $3x$; б) $x-y$; в) $3s+4v$; г) 5.

6 Сократите дробь:

а) $\frac{4b^3hv^4}{-3b^5h^6v^6}$; б) $\frac{7gu^3v}{2g^5u^2v^5}$;

в) $\frac{-5z^6}{-5g^6k^6z^3}$; г) $\frac{8d^2p^3r^4y^5}{2d^2p^2z^6}$;

д) $\frac{2jmp^2r^4}{9j^4mp^2r^5}$; е) $\frac{-8ak^6r^3}{5k^5r^2}$;

ж) $\frac{-9fpr^4z^2}{3p^6r^6z}$; з) $\frac{j^2x^2}{7j^2s^5w^2x^6}$.

7 Сократите дробь:

а) $\dfrac{ab(a-2b)}{3(a-2b)}$;

б) $\dfrac{(x+y)(2x+4y)}{(2x+4y)xy}$;

в) $\dfrac{5nm+3nq}{(5m+3q)z}$;

г) $\dfrac{a^2i-ja^2}{(i-j)(i+j)}$;

д) $\dfrac{2x+6y}{3x+9y}$;

е) $\dfrac{(k+1)(k+2)}{(k+2)(k+3)}$;

ж) $\dfrac{uv^2+uv}{(v+1)(g-2)}$;

з) $\dfrac{pq^2(z-2s)}{(z-2s)(p+q^2)}$.

8 Сократите дробь:

а) $\dfrac{m^2-mn}{m^2-n^2}$;

б) $\dfrac{k^2-l^2}{(k+l)^2}$;

в) $\dfrac{s^2(s+1)^3}{s^4(s+1)^2}$;

г) $\dfrac{q^2(q-p)^3(q-2p)^4}{q^4(q-p)^3(q-2p)^2}$;

д) $\dfrac{u^2-v^2}{u^3-v^3}$;

е) $\dfrac{(f+g)^3}{f^3+g^3}$.

Н

9 Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$;

б) $\dfrac{25ug^2+70guh+49h^2u}{(5g+7h)^3}$;

в) $\dfrac{k^4-l^4}{(k+l)(k^2+l^2)}$;

г) $\dfrac{(x+y)^5}{(x^2+2xy+y^2)^4(x-y)}$;

д) $\dfrac{4z^2-25}{4z^2-20z+25}$;

е) $\dfrac{6h^2j^4x+15j^4h^2}{(2x+5)^3}$.

10 Запишите частное в виде дроби, после чего сократите её:

а) $(12x^2yz^4):(18x^2y^3z^2)$;

б) $(10fu^4v^6z^2):(-5f^6u^5v^3z^2)$;

в) $(3jp^5u^8):(9j^5p^3u^6)$;

г) $(-4a^3b^6c^3j^5):(-4a^6b^6c^3j^6)$;

д) $(a^2-b^2):(a^3-b^3)$;

е) $(g+h)^2:(g^3+h^3)$;

ж) $(8q^3+27k^3):(2q+3k)^3$;

з) $(125v^3-343u^3):(5v-7u)^3$.

11 Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2b+ab^2+a+b}{ab+1}$;

б) $\dfrac{u^2-2v+uv-2u}{u-2}$;

в) $\dfrac{2b^2-2ab+as-bs}{-2b^2-2ab+as+bs}$;

г) $\dfrac{-27+126s-147s^2}{(7s-3):2}$;

д) $\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^3b-2a^2b^2+ab^3}$;

е) $\dfrac{x^5+x^3y^2-x^2y^3-y^5}{x^4-y^4}$.

12 Упростите выражение:

а) $\dfrac{x-5y}{5y-x}$;

б) $\dfrac{(x-5y)^2}{5y-x}$;

в) $\dfrac{(x-5y)^3}{(5y-x)^4}$;

г) $\dfrac{(5y-x)^3}{(x-5y)^4}$;

д) $\dfrac{(x-5y)^5}{(5y-x)^3}$;

е) $\dfrac{(5y-x)^4}{(x-5y)^4}$;

ж) $\dfrac{(x-5y)^4}{(5y-x)^2}$;

з) $\dfrac{(x-5y)^2}{(5y-x)^5}$.

П

13 Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2+5ab+3a+15b}{a^2-25b^2}$;

б) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{(a+b-c)^2}$;

в) $\dfrac{(x^8-y^8)(x^4-y^4)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)^2}$;

г) $\dfrac{2-6r+4r^2-3s+4rs+s^2}{4r^2-2r-s+4rs+s^2}$;

д) $\dfrac{a^3+2a^2b-4ab^2-8b^3}{a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3}$;

е) $\dfrac{-64p^3+144p^2t-108pt^2+27t^3}{16p^3-8p^2t-15pt^2+9t^3}$;

ж) $\dfrac{11x^2-6x-6x^3+x^4}{2x^2-3x^3+x^4}$;

з) $\dfrac{x^9y^6+x^{11}y^{10}-x^{13}y^{14}-x^{15}y^{18}}{x^9y^6-x^{11}y^{10}-x^{13}y^{14}+x^{15}y^{18}}$.

14 Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^6+1}{a^4-1}$;

б) $\dfrac{x^3+x^2y-xy^2-y^3-x^2z+y^2z}{x^3-x^2y-xy^2+y^3+x^2z-y^2z}$;

в) $\dfrac{(a+b)^3-(a-b)^3}{18a^4b+12a^2b^3+2b^5}$;

г) $\dfrac{a(b-c)-b(a-c)}{a(b-c)^2-b(a-c)^2}$;

д) $\dfrac{q+qp+q^2t+pt+p^2t+qpt^2}{pt+p^2t+qpt^2-q-qp-q^2t}$;

е) $\dfrac{g^8+g^4j^4+j^8}{g^{12}-j^{12}}$.

М

15 Сократите дробь:

а) $\dfrac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3-3abc}$;

б) $\dfrac{(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3}{3(x+y)(x+z)}$;

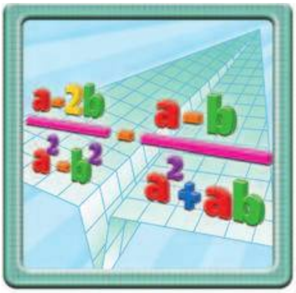
в) $\dfrac{x^3y^2z+x^2y^3z+x^2yz^2+xy^2z^2+x^2y^2z^2+xyz^3}{x^3y^2z+x^2y^3z-x^2yz^2-xy^2z^2+x^2y^2z^2-xyz^3}$;

г) $\dfrac{d^2(a-b)(b-c)+b^2(a-d)(c-d)}{c^2(a-b)(a-d)+a^2(b-c)(c-d)}$;

д) $\dfrac{a^3b^3+c^3d^3+3a^2b^2cd+3abc^2d^2-cd-ab}{a^2b^2-c^2d^2}$;

е) $\dfrac{(x-3)\left((x-5)^2+(x-4)^2+(x-3)^2+(x-2)^2-14x\right)(2x-9)}{(x-9)\left((x+5)^2+(x+4)^2+(x+3)^2+(x+2)^2-58x\right)(2x-3)}$.

1.3 Сложение и вычитание алгебраических дробей



Вспоминаем то, что знаем

- Расскажите, как выполняют сложение и вычитание числовых дробей с одинаковыми знаменателями.
- Расскажите, как выполняют сложение и вычитание числовых дробей с разными знаменателями.
- Расскажите, как находят общий знаменатель числовых дробей.
- Расскажите, как определяют добавочные множители.

Открываем новые знания

- Как вы думаете, похожи ли правила сложения и вычитания алгебраических дробей на известные вам правила сложения и вычитания числовых дробей? Обоснуйте ваш ответ.

Как выполняют сложение и вычитание алгебраических дробей?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Вспомним, как мы выполняем сложение и вычитание числовых дробей.

Сначала рассмотрим случай, когда знаменатели дробей одинаковые.

Складывая дроби с одинаковыми знаменателями, мы складываем их числители, а знаменатель оставляем прежним.

Например, $\frac{8}{17}+\frac{3}{17}=\frac{8+3}{17}=\frac{11}{17}$.

При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями мы вычитаем из числителя первой дроби числитель второй дроби, а знаменатель оставляем прежним.

Например, $\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9}$.

И, наконец, чтобы найти сумму или разность дробей с разными знаменателями, мы сначала приводим дроби к общему знаменателю, а затем складываем или вычитаем по сформулированным выше правилам сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, найдём сумму дробей $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{18}$. Общим знаменателем этих дробей является 36, поэтому сначала приведём дроби к этому знаменателю:

$$\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{15}{36}; \qquad \frac{7}{18}=\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{14}{36}.$$

Теперь выполняем сложение:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{15+14}{36}=\frac{29}{36}.$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей производится по точно таким же правилам.

Основные трудности здесь технические — научиться находить общий знаменатель. В большинстве случаев для этого нужно предварительно разложить имеющиеся знаменатели на множители, а затем поступать так же, как при нахождении наименьшего кратного, — брать произведение всех встретившихся множителей, причём в наибольшей из встретившихся степеней.

Например, найдём сумму дробей $\frac{2m}{15n^3}$ и $\frac{7}{9m^2n^2}$.

Здесь знаменатели уже разложены на множители. Коэффициентом общего знаменателя будет наименьшее общее кратное коэффициентов имеющихся знаменателей, т.е. 45, буква n войдёт в общий знаменатель в 3-й степени, а буква m — во 2-й. После того как общий знаменатель найден, определяем добавочные множители (для первой дроби это будет $3m^2$, а для второй $5n$) и выполняем сложение:

$$\frac{2m}{15n^3}^{\backslash 3m^2} + \frac{7}{9m^2n^2}^{\backslash 5n} = \frac{6m^3+35n}{45n^3m^2}.$$

Найдём разность дробей $\dfrac{a-2b}{a^2-b^2}$ и $\dfrac{a-b}{a^2+ab}$. Сначала разложим знаменатели на множители:

$$\frac{a-2b}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a^2+ab}=\frac{a-2b}{(a-b)(a+b)}-\frac{a-b}{a(a+b)}.$$

Теперь находим общий знаменатель, им будет $a(a-b)(a+b)$, определяем добавочные множители и заканчиваем вычитание:

$$\frac{a-2b}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a^2+ab}=\frac{a-2b}{(a-b)(a+b)}^{\backslash a}-\frac{a-b}{a(a+b)}^{\backslash a-b}=\frac{a(a-2b)-(a-b)^2}{a(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{a^2-2ab-a^2+2ab-b^2}{a(a-b)(a+b)}=\frac{-b^2}{a(a-b)(a+b)}=-\frac{b^2}{a^3-ab^2}=\frac{b^2}{-\left(a^3-ab^2\right)}=$$

$$=\frac{b^2}{ab^2-a^3}.$$

На последних шагах мы перенесли знак «–» в знаменатель, что позволило записать окончательный ответ с меньшим количеством минусов.

При нахождении алгебраической суммы многочлена и дроби многочлен обычно записывают в виде дроби, после чего действуют по обычному алгоритму. Например:

$$2t+3-\frac{6t^2+1}{3t-1}=\frac{2t+3}{1}^{\backslash 3t-1}-\frac{6t^2+1}{3t-1}^{\backslash 1}=\frac{(2t+3)(3t-1)-\left(6t^2+1\right)}{3t-1}=$$

$$=\frac{6t^2-2t+9t-3-6t^2-1}{3t-1}=\frac{7t-4}{3t-1}.$$

При нахождении алгебраической суммы нескольких дробей можно находить общий знаменатель сразу для всех дробей. Например:

$$\frac{x-3}{x+3}+\frac{4x^2}{x^2-9}-\frac{x+3}{x-3}=\frac{x-3}{x+3}^{\backslash x-3}+\frac{4x^2}{(x+3)(x-3)}-\frac{x+3}{x-3}^{\backslash x+3}=\frac{(x-3)^2+4x^2-(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}=$$

$$=\frac{x^2-6x+9+4x^2-x^2-6x-9}{(x+3)(x-3)}=\frac{4x^2-12x}{(x+3)(x-3)}=\frac{4x\,\cancel{(x-3)}}{(x+3)\,\cancel{(x-3)}}=\frac{4x}{x+3}.$$

В то же время бывают ситуации, когда находить общий знаменатель сразу для всех дробей нерационально, а гораздо удобнее работать с дробями по очереди. Например, найдём следующую сумму трёх дробей:

$$\frac{1}{(m+4)(m+5)}+\frac{1}{(m+5)(m+6)}+\frac{1}{(m+6)(m+7)}.$$

Если действовать, как в предыдущем примере, то получим:

$$\frac{1^{\diagdown(m+6)(m+7)}}{(m+4)(m+5)}+\frac{1^{\diagdown(m+4)(m+7)}}{(m+5)(m+6)}+\frac{1^{\diagdown(m+4)(m+5)}}{(m+6)(m+7)}=$$

$$=\frac{(m+6)(m+7)+(m+4)(m+7)+(m+4)(m+5)}{(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}.$$

Громоздкий числитель можно после выполнения всех действий упростить, но возникнет проблема его разложения на множители (ведь получившуюся дробь нужно попытаться сократить).

Попробуем действовать по-другому. Найдём сначала сумму первых двух дробей в надежде, что она возможно упростится. Получим:

$$\frac{1^{\diagdown m+6}}{(m+4)(m+5)}+\frac{1^{\diagdown m+4}}{(m+5)(m+6)}=\frac{m+6+m+4}{(m+4)(m+5)(m+6)}=$$

$$=\frac{2m+10}{(m+4)(m+5)(m+6)}=\frac{2\cancel{(m+5)}}{(m+4)\cancel{(m+5)}(m+6)}=\frac{2}{(m+4)(m+6)}.$$

Теперь сложим полученную сумму с третьей дробью:

$$\frac{2^{\diagdown m+7}}{(m+4)(m+6)}+\frac{1^{\diagdown m+4}}{(m+6)(m+7)}=\frac{2(m+7)+m+4}{(m+4)(m+6)(m+7)}=$$

$$=\frac{3m+18}{(m+4)(m+6)(m+7)}=\frac{3\cancel{(m+6)}}{(m+4)\cancel{(m+6)}(m+7)}=\frac{3}{(m+4)(m+7)}.$$

Ответ можно оставить в таком виде, а можно раскрыть скобки в знаменателе, привести подобные и получить $\dfrac{3}{m^2+11m+28}$.

Возникает естественный вопрос: «Какой же вид лучше?» Ответ зависит от конкретной ситуации, от того, что мы собираемся делать с полученным выражением дальше. Решая задачи, вы постепенно приобретёте необходимый опыт.

Н

1 Закончите предложение.

а) Для нахождения суммы алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями достаточно … .

б) Для нахождения разности алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями достаточно … .

2 Закончите предложение.

а) Для нахождения суммы алгебраических дробей с различными знаменателями достаточно … .

б) Для нахождения разности алгебраических дробей с различными знаменателями достаточно … .

3 Найдите общий знаменатель дробей:

а) $\frac{x}{3y^3z}$ и $\frac{3}{5xy^2z^3}$;

б) $\frac{4by^5}{3f^6p}$ и $-\frac{4kw^2}{7df^5}$;

в) $-\frac{3}{2cks^2}$ и $\frac{4g^2}{f^5v}$;

г) $-\frac{d^3t^4}{l^3s^3}$ и $\frac{3}{8l^3s}$;

д) $\frac{x}{3y^3z}$ и $-\frac{a^4l}{d^3}$;

е) $-\frac{au^3}{20}$ и $-\frac{tw^4}{5k^3p}$;

ж) $\frac{2u^2}{5d^4z^3}$ и $-\frac{5e^3x^6}{6z^3}$;

з) $\frac{9cf}{2h^2y^2}$ и $\frac{3p^2}{2u^4w^4}$.

4 Найдите общий знаменатель дробей:

а) $\frac{2}{a^2+ab}$ и $\frac{3a-b}{b^2+ab}$;

б) $\frac{y}{y^2+y}$ и $\frac{y}{y^2-y}$;

в) $\frac{u+v}{u^2v+v^2u}$ и $\frac{uv}{u^3v^2+v^3u^2}$;

г) $\frac{p+qr}{pqr+p^2q}$ и $\frac{pq+r}{pqr-p^2q}$;

д) $\frac{1}{n^4m^3+n^3}$ и $\frac{1}{n^4m^4+n^3}$;

е) $\frac{g+h}{g-h}$ и $\frac{g-h}{g+h}$.

5 Найдите общий знаменатель дробей:

а) $\frac{x-1}{x^2+4x}$, $\frac{3x-1}{x^2-4x}$ и $\frac{2x-1}{x^2-16}$;

б) $\frac{1}{a+b}$, $\frac{2}{a-b}$ и $\frac{3}{a^2+b^2}$;

в) $\frac{r-s}{rs}$, $\frac{rs}{r-s}$ и $\frac{1}{rs(r-s)}$;

г) $\frac{6v}{7e^2u^5}$, $\frac{5d^4}{2bf^2v^4}$ и $\frac{2b^3}{3k^4tw}$.

6 Найдите сумму дробей:

а) $\frac{3a}{a-2b}$ и $\frac{b-1}{a-2b}$;

б) $-\frac{4m^2}{7w^3}$ и $-\frac{3m^2}{7w^3}$;

в) $\frac{6g^5t^4}{3t^3-8t^6}$ и $\frac{-5g^5t^4}{3t^3-8t^6}$;

г) $\frac{q-p}{p-2}$ и $\frac{2p-q-2}{p-2}$;

д) $\frac{49p^2}{7p-3b^2}$ и $\frac{-9b^4}{7p-3b^2}$;

е) $\frac{6{,}4h^6}{6{,}4h^3-8h^6}$ и $\frac{3{,}6h^6}{6{,}4h^3-8h^6}$.

7 Найдите разность дробей:

а) $\frac{2x+y}{x-3y}$ и $\frac{2x-y}{x-3y}$;

б) $\frac{a-2b}{a+2b}$ и $\frac{a+2b}{a+2b}$;

в) $\frac{rd-r^3}{d-r^4}$ и $\frac{rd-r^5+r^3}{d-r^4}$;

г) $\frac{i-7u}{iu}$ и $\frac{i+7u}{iu}$;

д) $\frac{w^2-w+1}{(w+1)^2}$ и $\frac{w}{(w+1)^2}$;

е) $\frac{f^3+g^3}{(f+g)^3}$ и $\frac{-3fg(f+g)}{(f+g)^3}$;

ж) $\frac{2n-11n}{5n+14n}$ и $\frac{-7n-3n}{5n+14n}$;

з) $\frac{5k^4u^6}{3ku^3-5ku^5}$ и $\frac{3rx}{3ku^3-5ku^5}$.

Н

8 Найдите алгебраическую сумму дробей:

а) $\frac{x+3y}{3x-9y}+\frac{3x-2y}{2x-6y}$;

б) $\frac{9d-10l}{-90-45d}+\frac{5z}{-10-5d}$;

в) $\frac{9h-4t}{-60j+36x}+\frac{-2s-10u}{-90j+54x}$;

г) $\frac{-4b+7k}{40t+36u}+\frac{9f+7y}{100t+90u}$;

д) $\frac{10m}{-16g+40s}+\frac{-2h-10z}{28g-70s}$;

е) $\frac{-6f-5k}{100+30j}+\frac{p+10u}{-60-18j}$.

9 Выполните действия:

а) $\frac{2x-y}{6x^2y}+\frac{x-3y}{4xy^2}$;

б) $\frac{4z}{3k^2p^2}-\frac{-8d-2r}{7k}$;

в) $\frac{r-c}{6m^5n}+\frac{r+c}{m^5n}$;

г) $-\frac{-8w-2x}{2d^4l^2}+\frac{-w+5x}{7dl^6}$;

д) $-\frac{2h-6r}{6t^4u^6}+\frac{7h+10r}{7tu^6}$;

е) $\frac{8e+6y}{6w^6q^6}+\frac{e-y}{7w^2q}$.

10 Выполните действия:

а) $\frac{4}{9a^3b}+\frac{2}{3a^2b^2}-\frac{1}{6ab^3}$;

б) $-\frac{1}{8d^5}-\frac{1}{9k^5y}+\frac{1}{10s^5z}$;

в) $\frac{1}{8f^6}-\frac{1}{g^5j^2}-\frac{1}{7a^4}$;

г) $\frac{1}{e}+\frac{1}{8t^5u}+\frac{1}{c^3v}$;

д) $\frac{4}{9a^3b}+\frac{2}{3a^2b^2}-\frac{1}{6ab^3}$;

е) $\frac{1}{8f^6}-\frac{1}{3u^{11}}+\frac{1}{10u^6}$;

ж) $\frac{1}{8r^6}+\frac{1}{9r^3y^5}+\frac{1}{8r^4y^4}$;

з) $-\frac{1}{9c^9}-\frac{1}{7c^2}-\frac{1}{2bc^2}$.

11 Выполните действия:

а) $\frac{a+b}{a-2b}-\frac{a-b}{2b-a}$;

б) $\frac{1}{2k}-\frac{l}{2k(k+l)}$;

в) $\frac{i}{ai+a^2j}+\frac{j}{bi+abj}$;

г) $\frac{4b-c}{2b-c}+\frac{8b+c}{12b-6c}$;

д) $\frac{4e-9m}{7e-6m}-\frac{10e+2m}{7se-6sm}$;

е) $\frac{g^3+h^2}{2gh-h^2}-\frac{g^2+h^3}{2g^2-gh}$.

12 Найдите алгебраическую сумму дробей:

а) $\frac{x^2+2xy}{3x-y}+2x$;

б) $-7g^2+\frac{9w-9v^2}{4k-l}-4hy^2$;

в) $40f^3+7s^3+\frac{3e^2-l^2t^3}{g+m}$;

г) $2-\frac{6j^2y^2-8w^3}{10t-8y}$;

д) $12b+\frac{4p^2-6w}{9e-2z}$;

е) $\frac{9c^3-5h^2}{8d-5j}+20h-2t$;

ж) $\frac{3-8w^3}{9j-6z}-4f^3-8v^2$;

з) $4x+\frac{m^3y-20u}{9l+m}$.

13 Выполните действия:

а) $\frac{m}{an-bn}-\frac{n}{am-bm}$;

б) $\frac{2c-9w}{9aly-awy}+\frac{14+3w}{27lz-3wz}$;

в) $\frac{7f-9h}{35lr-10rt}+\frac{5e-10x}{28lz-8tz}$;

г) $\frac{7g-4v}{8dl+16dv}-\frac{i-3w}{4hl+8hv}$;

д) $\frac{k-2p}{-30k+10p}-\frac{4p-3k}{-30kz+10pz}$;

е) $\frac{n-7t}{60gn+40gt}+\frac{4n+4t}{60n+40t}$.

14 Выполните действия:

а) $\dfrac{m}{m^2-n^2}-\dfrac{n}{m^2-mn}$;

б) $\dfrac{1}{25x^2-5x+\dfrac{1}{4}}-\dfrac{x}{5x-\dfrac{1}{2}}$;

в) $\dfrac{x}{(2x-3)(2x+y)}+\dfrac{y}{(2x-3)(2x-y)}$;

г) $\dfrac{2u-5j}{(j-5i)(4r-3b)}+\dfrac{2u+5j}{2j(4r-3b)}$;

д) $\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{a^2-b^2}$;

е) $\dfrac{1}{(2u+v)^{12}}-\dfrac{1}{u(2u+v)^{11}}$;

ж) $\dfrac{g^2}{f^4-g^4}+\dfrac{1}{f^2+g^2}$;

з) $\dfrac{1}{q(q-1)(q-2)}+\dfrac{q-1}{q^2-2q}$.

15 Преобразуйте выражение в дробь:

а) $\dfrac{x+1}{x^2-6x+9}-\dfrac{x-1}{x^2-9}$;

б) $\dfrac{a+h}{25a^2-20ah+4h^2}-\dfrac{ah}{25a^2-4h^2}$;

в) $\dfrac{a+c}{ac+bc+ad+bd}+\dfrac{b+d}{ac+bc-ad-bd}$;

г) $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)}-\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$;

д) $\dfrac{f^6-1+2f^2-2f^4}{f^{12}-1}-\dfrac{2+f^2}{1+2f^2+2f^4+f^6}$;

е) $\dfrac{2u+3v}{4u-12uv+9v^2}+\dfrac{2u-3v}{4u+12uv+9v^2}$.

16 Представьте выражение в виде дроби:

а) $\dfrac{2x+4}{-x^2+4x-4}+\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$;

б) $\dfrac{1}{8+12a+6a^2+a^3}-\dfrac{1}{4+4a+a^2}$;

в) $\dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)}-\dfrac{s+5}{(s+1)(s+3)}$;

г) $\dfrac{z-3}{z^3-z}+\dfrac{z-1}{2z^2-3z+z^3}$;

д) $\dfrac{9t+8}{(t-3)^3-t^3}-\dfrac{1}{9(3-3t+t^2)}$;

е) $\dfrac{i+j}{(i+j)^2-(i-j)^2}+\dfrac{i-j}{ij}$.

17 Найдите алгебраическую сумму дробей:

а) $\dfrac{1}{x^2+xy}-\dfrac{1}{xy-y^2}+\dfrac{2}{x^2-y^2}$;

б) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(a+b)^3}$;

в) $\dfrac{(u-v)^3}{u+v}+\dfrac{(u-v)^2}{(u+v)^2}+\dfrac{(u^2-v^2)^2}{(u+v)^4}$;

г) $\dfrac{5}{m^3+n^3}+\dfrac{5}{m^3-n^3}+\dfrac{1}{mn}$;

д) $\dfrac{1}{q+p}-\dfrac{1}{q-p}+\dfrac{2q}{q^2-p^2}$;

е) $\dfrac{z-1}{z+1}-\dfrac{z-2}{z+2}+\dfrac{z-3}{z+3}-1$.

18 Упростите выражение:

а) $\dfrac{10a}{25a^2-1}-\dfrac{5a+1}{15a-3}+\dfrac{5a-1}{10a+2}$;

б) $\dfrac{3s+\frac{1}{2}}{6s^2-\frac{3}{8}}-\dfrac{\frac{16}{7}s+\frac{58}{21}}{8s-2}+\dfrac{2s+\frac{2}{7}}{7s+1}$;

в) $\dfrac{w+\frac{49}{13}}{9w^2-\frac{441}{4}}+\dfrac{w-\frac{97}{26}}{2w-7}-\dfrac{2w+\frac{113}{234}}{4w+1}$;

г) $\dfrac{k-\frac{1}{6}}{2k+3}-\dfrac{\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}}{k}+\dfrac{k-1}{k^2-\frac{9}{4}}$;

д) $\dfrac{y+\frac{9}{2}}{2y+1}+\dfrac{2y+7}{4y^2-1}-\dfrac{y+\frac{7}{2}}{2y-1}$;

е) $\dfrac{j}{j^2-9}+\dfrac{2j+\frac{11}{2}}{j+3}+\dfrac{\frac{3}{2}-2j}{j-1}$.

П

19 Представьте выражение в виде дроби:

а) $\dfrac{3l+1}{(5l-2)^3(3l-1)^2}-\dfrac{5l+2}{(5l-2)^2(3l-1)^3}$;

б) $\dfrac{b^2}{a^2+2ab+b^2+ac+bc}+\dfrac{a-b}{a+b+c}$;

в) $\dfrac{i(i+1)}{(i+2)(i+3)}-\dfrac{(i+2)(i+3)}{i(i+1)}-\dfrac{i}{(i+1)(i+2)}$;

г) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}$.

20 Найдите алгебраическую сумму дробей:

а) $\dfrac{a^2+5ab+3a+15b}{a^2-25b^2}+\dfrac{a}{5b-a}$;

б) $\dfrac{h-h^3+h^7}{h^2+h^3}+\dfrac{-1+h^2-h^3+h^4-h^5+h^7-h^9+h^{10}-h^{11}+h^{12}}{h-h^8}$;

в) $\dfrac{a-a^2+b+ab+2b^2+c-3ac-6bc+4c^2}{(a+b+c)(a+b-c)}+\dfrac{a-2b+4c}{a+b+c}$;

г) $\dfrac{xy\left(-x^2-xy+x^2y+2xy^2+y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2y^3+y^2x^3\right)}+\dfrac{x-y^2}{x^3y+y^3x}$;

д) $\dfrac{-4r^3+r^2(5-Rw)+Rw(1+Rw)+r(4+5Rw)}{\left(-r+r^2-Rw\right)\left(4r+r^2+Rw\right)}+\dfrac{wR+4r}{wR+r^2+4r}$.

21 Упростите выражение:

а) $\dfrac{f+g}{f+g+h}+\dfrac{f-g}{f+g-h}+\dfrac{f-2f^2+g-2fg-h+2gh}{f^2+2fg+g^2-h^2}$;

б) $\dfrac{5x-3}{x(x+1)(x+2)}+\dfrac{23x+23x^2+8x^3+x^4}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\dfrac{9}{x(1+x)(2+x)(3+x)}$;

в) $\dfrac{x+y}{2x+3y}+\dfrac{x^2(12-8y)+5y^2(3+2y)+4xy(7+13y)-32x^3}{(4x-5y)(2x+3y)(6x+5y)}+\dfrac{x-y}{6x+5y}$;

г) $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{1-2a^2-2b^2}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{a+b}$;

д) $\dfrac{i+j}{i+j+1}+\dfrac{i-j}{i+j-1}+\dfrac{1+i+3j-2ij-2i^2}{i^2+2ij+j^2-1}$;

е) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1}+\dfrac{x-1}{x^2-1}+\dfrac{x^3-1}{1+x+x^2+x^3}$.

М

22 Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{(x-y)(z-y)}+\dfrac{1}{(y-z)(x-z)}+\dfrac{1}{(z-x)(y-x)}$;

б) $\dfrac{a-b}{(c-d)(ac-bd)}+\dfrac{b^2+a(b-c)-bc-2}{c^2-d^2}+\dfrac{a+b}{(c+d)(ac-bd)}$;

в) $\dfrac{1}{rs+S}+\dfrac{1}{rs+2S}-\dfrac{r^2s^2+2rsS^2-(2-3S)S^2}{\left(rs+S^2\right)\left(r^2s^2+3rsS+2S^2\right)}$;

г) $\dfrac{k+m+n-k^2n-2kmn-m^2n-2kn^2-3mn^2-2n^3}{kmn+m^2n+kn^2+2mn^2+n^3}+\dfrac{n+m+k}{n+m}+\dfrac{n}{n+m+k}$;

д) $\dfrac{2+3d}{2-3d}-\dfrac{14+45d-60d^2-150d^3}{(2+5d)\left(4-16d+15d^2\right)}+\dfrac{2+5d}{2-5d}$.

23 Упростите выражение:

а) $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{y-z}{y+z}+\dfrac{z-x}{z+x}+\dfrac{(z-x)(y-z)(x-y)}{(z+x)(y+z)(x+y)}$;

б) $\dfrac{x^2y^2z^2}{a^2b^2}+\dfrac{\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-a^2\right)\left(z^2-a^2\right)}{a^2\left(a^2-b^2\right)}+\dfrac{\left(x^2-b^2\right)\left(y^2-b^2\right)\left(z^2-b^2\right)}{b^2\left(b^2-a^2\right)}$;

в) $\dfrac{uv(l-x)(l-y)(l-z)}{(l-u)(l-v)}+\dfrac{lv(u-x)(u-y)(u-z)}{(u-l)(u-v)}+\dfrac{lu(v-x)(v-y)(v-z)}{(v-l)(v-u)}$;

г) $\dfrac{g+h+j}{(g-f)(h-f)(j-f)(x-f)}+\dfrac{f+h+j}{(f-g)(h-g)(j-g)(x-g)}+$

$+\dfrac{f+g+j}{(f-h)(g-h)(j-h)(x-h)}+\dfrac{f+g+h}{(f-j)(g-j)(h-j)(x-j)}$;

д) $\dfrac{1}{x^2+x-2}+\dfrac{-4+2x+3x^2-5x^4-6x^5-2x^6}{2x(x-1)(1+x)(2+x)\left(2+x+x^2\right)}\left(\dfrac{1}{x^2+x-1}+\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)+$

$+\dfrac{1}{x^2+x+2}$;

е) $\dfrac{x+1}{x^{10}-1}+\dfrac{x+1}{x^8-1}-$

$-\dfrac{(1+x)\left(1+x^2+x^4\right)\left(1-x^2+x^4\right)\left(3-x+3x^2-x^3+2x^4+2x^6+x^8\right)}{\left(x^{12}-1\right)\left(1+x^4\right)\left(1-x+x^2-x^3+x^4\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)}$;

ж) $\dfrac{a+b+c+d}{ab+bc}+\dfrac{a+b+c}{ac+b^2}-$

$-\dfrac{a^2(b+c)+b\left(b^2+c^2+b(c+d)\right)+a\left(b^2+3bc+c(c+d)\right)}{b(a+c)\left(b^2+ac\right)}$;

з) $\dfrac{(n-m)^4}{(n+m)^4}+\dfrac{(n+m)^4}{(n-m)^4}-$

$$-\frac{m^6+2m^8+2n^8-n^6-3m^4n^2+56m^6n^2+3m^2n^4+140m^4n^4+56m^2n^6}{(n-m)^2(n+m)^2(m^4-2m^2n^2+n^4)}.$$

1.4 Умножение и деление алгебраических дробей

Вспоминаем то, что знаем

- Расскажите, как выполняют умножение числовых дробей.
- Сформулируйте переместительный и сочетательный законы умножения для числовых дробей.
- Сформулируйте распределительный закон умножения относительно сложения для числовых дробей.
- Расскажите, что такое обратная дробь.
- Расскажите, как выполняют деление числовых дробей.

Открываем новые знания

- Как вы думаете, похожи ли правила умножения и деления алгебраических дробей на известные вам правила умножения и деления числовых дробей? Обоснуйте ваш ответ.

?! Как выполняют умножение и деление алгебраических дробей?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Точно так же, как это было со сложением и вычитанием, совсем кратко можно сказать так: умножение и деление алгебраических дробей выполняется по таким же правилам, как умножение и деление числовых дробей.

> Произведением двух дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей.

Это можно записать так:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}.$$

Здесь A, B, C и D — многочлены стандартного вида, причём многочлены B и D — ненулевые.

Полученную дробь нужно попытаться сократить. В некоторых случаях это удаётся сделать.

Найдём, например, произведение дробей $\frac{x+y}{x^2}$ и $\frac{x^3}{y}$. Получим:

$$\frac{x+y}{x^2}\cdot\frac{x^3}{y}=\frac{(x+y)\cdot x^3}{x^2\cdot y}=\frac{(x+y)\cdot x}{y}=\frac{x^2+xy}{y}.$$

Как мы уже обсуждали раньше, иногда выгодно не раскрывать скобки в числителе или знаменателе получившейся дроби. Скажем, мы могли оставить наше произведение в виде $\frac{(x+y)\cdot x}{y}$. Особенно часто так поступают на промежуточных стадиях преобразований.

Для операции умножения алгебраических дробей выполняются переместительный и сочетательный законы.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{C}{D}\cdot\frac{A}{B}; \qquad \left(\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\right)\cdot\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\cdot\left(\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}\right).$$

Здесь A, B, C, D, E и F — многочлены стандартного вида, причём многочлены B, D и F — ненулевые.

Для алгебраических дробей выполняется также распределительный закон умножения относительно сложения.

$$\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)\cdot\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\cdot\frac{E}{F}+\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}.$$

Здесь A, B, C, D, E и F — многочлены стандартного вида, причём многочлены B, D и F — ненулевые.

Для алгебраических дробей выполняется также правило возведения дроби в степень.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}.$$

Здесь A и B — многочлены стандартного вида, причём многочлен B – ненулевой, n — натуральное число.

Для алгебраической дроби $\frac{A}{B}$, числитель которой — ненулевой многочлен, дробь $\frac{B}{A}$ называется *обратной дробью*. Алгебраические дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$ называются *взаимно обратными*. Произведение взаимно обратных дробей равно единице: $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A} = 1$. Здесь A и B — ненулевые многочлены стандартного вида.

С помощью обратной дроби можно определить операцию деления алгебраических дробей.

Чтобы разделить дробь на дробь, можно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Это можно записать следующим образом.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}.$$

Здесь A, B, C и D — многочлены стандартного вида, причём многочлены B, C и D — ненулевые.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.

а) Для нахождения произведения двух алгебраических дробей нужно … .

б) Для возведения алгебраической дроби в степень с натуральным показателем нужно … .

2 Закончите предложение.

а) Для нахождения алгебраической дроби, обратной данной, нужно … .

б) Произведение взаимно обратных алгебраических дробей равно … .

в) Для нахождения частного двух алгебраических дробей нужно … .

3 Запишите дробь, обратную данной:

а) $\frac{x}{3y^3z}$; б) $-\frac{8c^2z}{5gmy^2}$; в) $-\frac{9h^3y^2}{10m^3}$; г) $\frac{2s^2}{5y}$; д) $\frac{2x+y}{3x-y}$; е) $\frac{8p}{7m-8d}$; ж) $\frac{5g-r}{4a-2r}$; з) $\frac{3x-7v}{2j+3l}$.

4 Перемножьте дроби:

а) $\dfrac{2cd}{a^2b}$ и $\dfrac{3ab}{c^2d}$;

б) $-\dfrac{2c^3}{3}$ и $\dfrac{9f^2}{5h}$;

в) $-\dfrac{4z^6}{g^2}$ и $-\dfrac{2l^3}{7j^2}$;

г) $-\dfrac{m}{nx^3}$ и $\dfrac{4f^3}{3r^3}$;

д) $\dfrac{7n^3r}{6u^2}$ и $-\dfrac{a^3s}{9dk}$;

е) $\dfrac{m^2}{fk}$ и $\dfrac{7r}{9}$;

ж) $\dfrac{2y}{e^2h^2}$ и $\dfrac{4fr^3}{j}$;

з) $\dfrac{b^3p^3}{7x^2}$ и $\dfrac{3c}{2}$.

5 Перемножьте дроби:

а) $\dfrac{x-1}{x^2}$, $\dfrac{3x-6}{x^2-1}$ и $\dfrac{x+1}{x-2}$;

б) $\dfrac{-8g+3j}{5g-2w}$, $\dfrac{5g-2w}{3j-8g}$ и $\dfrac{i-6m}{7p+6r}$;

в) $\dfrac{2a-6}{10z-7}$, $\dfrac{2a+6}{10z+7}$ и $\dfrac{a}{z}$;

г) $\dfrac{-5g-7r}{6-3r}$, $-\dfrac{8r}{7i-7k}$ и $\dfrac{7d-14}{-8c-6i}$.

6 Найдите произведение дробей:

а) $\dfrac{3a}{a-2b}$ и $\dfrac{a-2b}{b-1}$;

б) $\dfrac{10d-5j}{8i-4x}$ и $\dfrac{6i-3x}{10d+5j}$;

в) $-\dfrac{6t^2z^2}{f^3}$ и $\dfrac{f^4}{3t^3z^5}$;

г) $\dfrac{l}{4a-7c}$ и $\dfrac{l^2-l}{4a-7c}$;

д) $-\dfrac{5j^3v^3z^2}{2a^3p^2}$ и $-\dfrac{ip^3+p^2}{2a^3j^3}$;

е) $\dfrac{4k^2}{3m^2p}$ и $\dfrac{3a+6b}{4k}$.

7 Найдите частное дробей:

а) $\dfrac{2x+y}{x-3y}$ и $\dfrac{2x-y}{x-3y}$;

б) $\dfrac{6x+5y}{-r+3s}$ и $\dfrac{5x+6y}{-2r+6s}$;

в) $\dfrac{-10d-7t}{3t-6x}$ и $\dfrac{7s^3v}{t-2x}$;

г) $-\dfrac{3i}{10r-8x}$ и $-\dfrac{3i+3}{5r-4x}$;

д) $\dfrac{4al}{5x-6z}$ и $\dfrac{12al}{5x+6z}$;

е) $-\dfrac{5c}{2x+z}$ и $\dfrac{5cj^2}{8x+4z}$.

Н

8 Представьте в виде дроби:

а) $\frac{x+3y}{3x-9y}\cdot\frac{2x-6y}{3x+9y}$;

б) $\frac{5l-5h}{8e+2u}\cdot\frac{15l+15h}{32e-8u}$;

в) $\frac{l-10p}{g+7x}\cdot\frac{3l-30p}{2g+14x}$;

г) $\frac{20b+24p}{30i-15y}\cdot\frac{5b-6p}{6i+3y}$;

д) $\frac{3a^3f^3}{e^2x}\cdot\frac{21a^3f^3}{5e^2x}$;

е) $\frac{7e^3g^3}{p-3h}\cdot\frac{e^3g^3}{7p+21h}$;

ж) $\frac{8h-6m}{-9j+9m}\cdot\frac{24h+18m}{-36j+36m}$;

з) $\frac{10e-7y}{3+p}\cdot\frac{10e+7y}{12+4p}$.

9 Выполните действия:

а) $\frac{2x-y}{6x^2y}:\frac{4x-2y}{4xy^2}$;

б) $\frac{7k+4p}{5s^2t^3}:\frac{14k+8p}{5s^2t^2}$;

в) $\frac{10h+y}{ek}:\frac{10h+y}{e^2k^2}$;

г) $\frac{-5e-7x}{5ck^3}:\frac{5e+7x}{25c^2k}$;

д) $\frac{6pt}{16d+2m}:\frac{3p^2t}{8d+m}$;

е) $\frac{8m^5}{28f+35y}:\frac{2m^3}{4f+5y}$;

ж) $\frac{6e+3i}{6y}:\frac{6e-3i}{6y}$;

з) $\frac{u^7z^9}{-10+8b}:\frac{u^2z^2}{4b-5}$.

10 Выполните действия:

а) $\frac{4m}{9a^3b}:\frac{2mn}{3a^2b^2}\cdot 6ab^3$;

б) $\frac{2u^3}{9}:\frac{8c}{7u}\cdot\frac{324cg^3}{7u^4}$;

в) $-\frac{2g}{e^3}:\frac{10m^2}{9p^2}\cdot\frac{35e^3m^2}{9gp^2}$;

г) $\frac{6u^3}{7z^2}:\frac{7}{5x^2}\cdot\frac{343z^2}{30u^3x^2}$;

д) $-\frac{3}{2s}:\left(-\frac{3}{h}\right)\cdot\left(-\frac{2s}{h}\right)$;

е) $\frac{3w^3}{y}:\left(-\frac{7a}{3j^3}\right)\cdot\frac{7ag^3y}{j^3w^3}$.

11 Преобразуйте в алгебраическую дробь:

а) $\frac{a+b}{a-2b}:\frac{a^2-b^2}{2b-a}$;

б) $\frac{5x-y}{6y-5x}:\frac{y-5x}{5x-6y}$;

в) $\frac{(4t-7)^3}{(4t-2)^4}:\frac{(4t-7)^4}{(4t-2)^4}$;

г) $\frac{3k^2p^5}{8fl^2r^3}:\left(-\frac{3k^2p^3}{8f^2lr}\right)$;

д) $\dfrac{i^2+2i+1}{(i-1)^3}:\dfrac{(i+1)^3}{i^2-2i+1}$;

е) $\dfrac{4l-5k}{j(g+7)}:\dfrac{z(8l-10k)}{-j^2(3g+21)}$.

12 Упростите выражение:

а) $xy:\dfrac{1}{x}$;

б) $\dfrac{z}{z}:z\cdot\dfrac{z}{z}$;

в) $\dfrac{q}{q}\cdot q:\dfrac{q}{q}$;

г) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\cdot a$;

д) $h+\dfrac{h}{h+h:h}$;

е) $\dfrac{1}{1+1:x}-\dfrac{x}{x+1}$;

ж) $\left(j^3:j^2\right)^2:j^3$;

з) $\dfrac{m}{M}:\dfrac{M}{m}\cdot\dfrac{m}{M}:\dfrac{M}{m}$.

13 Выполните действия:

а) $\dfrac{m}{an-bn}:\dfrac{n}{am-bm}$;

б) $\dfrac{pq+q^2}{x^2-x}:\dfrac{wq+w^2q}{x}$;

в) $\dfrac{f^2-4h^2}{2g+k}:\dfrac{f-2h}{4g^2-k^2}$;

г) $\dfrac{5e}{4gv^2w^3z^2}:\dfrac{25}{29a^3y^3}$;

д) $\dfrac{2ku+3vk}{5uq-4qv}:\dfrac{2su+3sv}{5au-4av}$;

е) $\dfrac{d(d+1)}{D(D+1)}:\dfrac{d(d-1)}{D(D-1)}$;

ж) $\dfrac{x^2+x^4}{x^5+x^7}:\dfrac{x^3-x^5}{x^6+x^8}$;

з) $\dfrac{uv^3-u^3v}{u^4v^3-u^3v^4}:\dfrac{u^2v^3-u^3v^2}{uv^2-u^2v}$.

14 Выполните действия:

а) $\dfrac{m}{m^2-n^2}:\dfrac{n}{m^2-mn}$;

б) $\dfrac{(a+b)^3}{\left(a^2-2ab+b^2\right)^3}:\dfrac{a^2+2ab+b^2}{(a-b)^5}$;

в) $\dfrac{h^8-g^8}{gh^4-g^5}:\dfrac{h^4+g^4}{h^3-hg^2}$;

г) $\dfrac{z+\dfrac{1}{z+1}}{z-\dfrac{1}{z+1}}\cdot\dfrac{z+\dfrac{1}{z-1}}{z-\dfrac{1}{z-1}}$;

д) $\dfrac{q^3-q^5}{q^2(q+1)}\cdot\dfrac{q^7-q^5}{q^8(q-1)}$;

е) $\dfrac{2x+4}{-x^2+4x-4}+\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$.

15 Преобразуйте выражение в дробь:

а) $\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}:\dfrac{a+b}{a-b}$;

б) $\dfrac{x+1}{x^2-6x+9}:\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$;

в) $\dfrac{u-\dfrac{v}{u-v}}{u-\dfrac{v}{u+v}}\cdot\dfrac{u+\dfrac{v}{u-v}}{u-\dfrac{v}{u-v}}$;

г) $\dfrac{k-2l}{25c^2-9d^2}\cdot\dfrac{25c^2-30cd+9d^2}{k^2-4l^2}$;

д) $\dfrac{(i+j)^2-i^2}{(i-j)^2-j^2}:\dfrac{(i+j)^2-j^2}{(i-j)^2-i^2}$;

е) $\dfrac{(i+j)^3-i^3}{(j-i)^3+i^3}:\dfrac{(i-j)^3+j^3}{(j-i)^3-j^3}$.

П

16 Представьте выражение в виде дроби:

а) $\dfrac{2h^4-3h^2r^3+r^6}{4h^4-8h^2r^3+3r^6}\cdot\dfrac{6r^6+5h^2r^3-6h^4}{3r^6-h^2r^3-2h^4}$;

б) $\dfrac{l^2-i^2}{i^2+3il+2l^2}\cdot\dfrac{i^2+2l^2+i+2l+3il}{i^2+l^2+i+l+2il}$;

в) $\dfrac{f^2+fj-6j^2}{f^2-6fj+8j^2}\cdot\dfrac{f^2-3fj-4j^2}{f^2+fj-6j^2}$;

г) $\dfrac{9x^2+36xy+36y^2}{9x^2+42xy+49y^2}:\dfrac{x^2+4xy+4y^2}{\dfrac{3x^2}{7}+2xy+\dfrac{7y^2}{3}}$.

17 Представьте выражение в виде дроби:

а) $\dfrac{2-3x+x^2}{5-6x+x^2}\cdot\dfrac{24-11x+x^2}{6-5x+x^2}$;

б) $\dfrac{r}{6r^2-5r-6}+\dfrac{6-11r+3r^2}{(6-13r+6r^2)(2+3r)}$;

в) $\dfrac{(n+m)^3-n^3}{(m-n)^3+n^3}+\dfrac{(n-m)^3+m^3}{(m-n)^3-m^3}$;

г) $\dfrac{f+1}{f^2+2f+1}-2\dfrac{1-f}{(f^2-2f+1)(1+f)}$;

д) $\dfrac{l}{i^4+i^3l+il^3+l^4}+\dfrac{i^3+l^3+il-l^2}{l^5-i^5+i^3l^2-i^2l^3}$;

е) $\dfrac{2(p-t)(2p+t)}{2p^3+p^2t-2pt^2-t^3}-\dfrac{1}{t+p}$.

18 Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{x^2+xy}:\dfrac{1}{xy-y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

б) $\dfrac{a+b}{a-b}:\dfrac{1}{a+2b}\cdot\dfrac{a-2b}{a^2-ab-2b^2}$;

в) $\dfrac{uv}{u^2+v^2}:\dfrac{u^2-v^2}{u+v}\cdot\dfrac{u^4-v^4}{uv}$;

г) $\dfrac{r^3+s^3}{r+s^2}:\dfrac{r^2-s^2}{(r+s)^2}\cdot\dfrac{r+s^2}{r^4+r^3s+rs^3+s^4}$;

д) $\dfrac{k^2+kl}{k^3+kl}:\dfrac{k^2+l}{l^2+k}\cdot\dfrac{k^2+k^3+l+kl}{k+k^2+l+kl}$;

е) $\dfrac{lir}{l^4i+l^3r}:\dfrac{l^2i^2-r^2}{l^2-i^2r^2}\cdot\dfrac{l^3i^3+l^2i^2r-lir^2-r^3}{lir-i^2r^2}$.

19 Представьте выражение в виде дроби:

а) $\dfrac{a^2+5ab+3a+15b}{a^2-25b^2}:\dfrac{a+3}{a+5b}$;

б) $\dfrac{25-25x-x^2+x^3}{50-25x-2x^2+x^3}\cdot\dfrac{8-4x-2x^2+x^3}{4-4x-x^2+x^3}$;

в) $\dfrac{p^3-6p^2+11p-6}{p^3-8p^2+21p-18}:\dfrac{p^3-7p^2+14p-8}{p^3-9p^2+26p-24}$;

г) $\dfrac{p^2+2pq+q^2-r^2}{p^2-2pq+q^2-r^2}\cdot\dfrac{p-q-r}{p+q+r}$;

д) $\dfrac{f^2+4fg+4g^2-1}{f^2+4fg+4g^2-4}:\dfrac{f^2+2g+4g^2+f+4fg}{f^2+4g+4g^2+2f+4fg}$;

е) $\dfrac{u^4-3u^2v^2+2v^4}{u^4-5u^2v^2+6v^4}\cdot\dfrac{u^4-u^2v^2-6v^4}{u^4+u^2v^2-2v^4}$.

20 Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\cdot\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^3+y^3}$;

б) $\dfrac{2+3u+u^2}{2-3u+u^2}\cdot\dfrac{2-5u+3u^2}{3+5u+2u^2}\cdot\dfrac{u^2-u-2}{3u^2+4u-4}$;

в) $\dfrac{f^4-g^5}{f^5-g^4}\cdot\dfrac{f^{10}+2f^5g^4-3g^8}{f^8+2f^4g^5-3g^{10}}\cdot\dfrac{f^4+3g^5}{f^5+3g^4}$;

г) $\dfrac{z^2-\dfrac{1}{z^2}}{z^2-\dfrac{6}{z^2}-1}\cdot\dfrac{z^2+\dfrac{6}{z^2}+5}{z^2-\dfrac{3}{z^2}-2}\cdot\dfrac{z^2+\dfrac{9}{z^2}-6}{z^2-\dfrac{3}{z^2}+2}$;

д) $\dfrac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2+2bc-c^2}\cdot\dfrac{a^2-b^2-2ac+c^2}{a^2-b^2-2bc-c^2}\cdot\dfrac{a^2-2ab+b^2-c^2}{-a^2+b^2+2ac-c^2}$;

е) $\dfrac{d^2-4}{4d^2-2d-2z+4dz}\cdot\dfrac{4d^2-2d+2z-4dz}{2d+d^2-4z-2dz}\cdot\dfrac{d^2-dz-2z^2}{d^2-2d-2z+dz}$.

М

21 Упростите выражение:

а) $\dfrac{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}\cdot\dfrac{ax-by}{(ax+by)^2-4abxy}$;

б) $\dfrac{u^{12}-v^{12}}{u^4+u^2v^2+v^4}\cdot\dfrac{u^4-u^2v^2+v^4}{u^4-v^4}$;

в) $\dfrac{m^4+m^2n^2+n^4}{n^2-m^2}:\dfrac{n^{18}-m^{18}}{m^{12}+m^6n^6+n^{12}}$;

г) $\dfrac{f^2+2f^2g-g^2+f^2g^2}{f^2-g^2-2fg^2-f^2g^2}\cdot\dfrac{f^2-2fg+g^2-f^2g^2}{f^2-g^2+2fg^2-f^2g^2}$;

д) $\dfrac{r^3+3r^2s+3rs^2+s^3}{r^4-4r^3s+6r^2s^2-4rs^3+s^4}:\dfrac{r^4+4r^3s+6r^2s^2+4rs^3+s^4}{r^3-3r^2s+3rs^2-s^3}$;

е) $\dfrac{4m^4+4m^2n^3+n^6}{-4m^4+n^6}\cdot\dfrac{4m^4-4m^2n^3+n^6}{6m^4+5m^2n^3+n^6}$.

1.5 Тождественные преобразования рациональных алгебраических выражений

Знакомимся с новой темой

В параграфе 1.1 мы уже говорили о тождественных преобразованиях рациональных алгебраических выражений. Поскольку рациональное выражение содержит только действия сложения, вычитания, умножения и деления, причём выполняются они каждый раз над целыми или дробными выражениями, то любое рациональное выражение может быть преобразовано к алгебраической дроби или многочлену.

В данном параграфе мы поговорим о том, как это делается, какие полезные приёмы при этом используются, и рассмотрим много примеров.

Прежде всего ещё раз вспомним, что порядок выполнения действий в рациональных выражениях точно такой же, как хорошо известный вам порядок выполнения действий в числовых выражениях. Многие такие преобразования полезно выполнять по действиям.

Первый полезный совет звучит так: «Прежде чем выполнять какое-либо действие с дробью, попытайся сократить её». Ясно, что для этого придётся разложить числитель и знаменатель на множители.

Скажем, упростим выражение:

$$\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}-xy\right)\left(\frac{x+y}{x^2-y^2}\right)^2.$$

Начнём с дроби в первой скобке:

1) $\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{\cancel{(x+y)}\left(x^2-xy+y^2\right)}{\cancel{x+y}}=x^2-xy+y^2.$

Мы видим, что дробь не просто сократилась — после сокращения она оказалась равной целому выражению:

2) $x^2-xy+y^2-xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2.$

Теперь попробуем сократить дробь во второй скобке:

3) $\frac{x+y}{x^2-y^2}=\frac{\cancel{x+y}}{(x-y)\cancel{(x+y)}}=\frac{1}{x-y}.$

Дальше всё совсем просто:

4) $\left(\frac{1}{x-y}\right)^2=\frac{1}{(x-y)^2}.$

5) $(x-y)^2\cdot\frac{1}{(x-y)^2}=\frac{(x-y)^2}{(x-y)^2}=1.$

Заметим также, что многие учащиеся (и учителя) больше любят преобразовывать выражение не по действиям, а работая сразу со всем выражением целиком. Понятно, что суть преобразований при этом не меняется, меняется только форма их записи.

Рассмотрим ещё один пример. Упростим выражение:

$$\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{a^2-2ab+b^2}\right)\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}.$$

Если действовать традиционно, то сначала (первым действием) выполняется сложение алгебраических дробей в скобках. Для этого разложим знаменатели на множители, найдём общий знаменатель, определим добавочные множители и т.д.:

$$\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{ab^{\backslash a-b}}{(a-b)(a+b)}+\frac{b^{2\backslash a+b}}{(a-b)^2}=\frac{ab(a-b)+b^2(a+b)}{(a-b)^2(a+b)}=$$

$$=\frac{a^2b-ab^2+ab^2+b^3}{(a-b)^2(a+b)}=\frac{a^2b+b^3}{(a-b)^2(a+b)}=\frac{b\left(a^2+b^2\right)}{(a-b)^2(a+b)}.$$

Мы уже несколько раз касались вопроса, в каком виде нужно записывать алгебраическую дробь, возникающую в промежуточных вычислениях, в частности, если в числителе или знаменателе стоит произведение скобок, то надо ли раскрывать эти скобки. Остановимся на этом чуть подробней. Сразу скажем, что общих рекомендаций, подходящих для всех выражений, здесь нет, как говорится, истина конкретна — надо каждый раз смотреть на возникшую ситуацию и приспосабливаться к ней. Тем не менее один полезный совет дать можно. Нужно посмотреть, какую операцию предстоит выполнять с вашей дробью на следующем шаге. Если это умножение или деление, то скорей всего полезно, чтобы и числитель, и знаменатель были разложены на множители. Если же следующая операция — сложение или вычитание, то, безусловно, полезно иметь разложенный на множители знаменатель; числитель же стоит разложить на множители, чтобы проверить, не сократится ли дробь. Если дробь не сократилась, то в большинстве случаев (но не во всех!) придётся вернуться к виду числителя как многочлена, т.е. тому виду, который он имел до разложения на множители.

В рассматриваемом примере следующей операцией, которую предстоит выполнять с дробью, является умножение, поэтому мы оставляем и числитель, и знаменатель разложенными на множители.

Выполним второе действие:

$$\frac{b\left(a^2+b^2\right)}{(a-b)^2(a+b)}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}=\frac{b\cancel{\left(a^2+b^2\right)}(a+b)^{\cancel{2}\,1}}{(a-b)^2\cancel{(a+b)}\cancel{\left(a^2+b^2\right)}}=\frac{b(a+b)}{(a-b)^2}.$$

При выписывании окончательного ответа важно внимательно посмотреть, что требуется в условии. Если в задании требуется преобразовать выражение в алгебраическую дробь, то скобки в числителе и знаменателе нужно раскрыть — ведь числитель и знаменатель алгебраической дроби должны быть многочленами стандартного вида. В нашем примере получится алгебраическая дробь $\frac{ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

Если же в задании требуется упростить выражение, то можно дать ответ и в виде $\frac{ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$, и в виде $\frac{b(a+b)}{(a-b)^2}$.

При решении рассмотренного примера в первом действии можно было поступить по-другому. После разложения на множители знаменателей вынесем за скобки общие множители из числителя и из знаменателя:

$$\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{ab}{(a-b)(a+b)}+\frac{b^2}{(a-b)^2}=\frac{b}{a-b}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)=$$

$$=\frac{b}{a-b}\left(\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}\right)=\frac{b}{a-b}\cdot\frac{a^2-ab+ab+b^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{b}{a-b}\cdot\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}.$$

Понятно, какой выигрыш мы получили от предпринятых действий: после вынесения за скобки внутри скобок получились более простые дроби, чем были вначале. Советуем запомнить этот приём, он часто даёт значительный выигрыш при преобразованиях рациональных выражений. Для его применения нужно, чтобы числители и знаменатели были разложены на множители. Отметим, что дополнительных усилий для этого прикладывать не придётся — ведь знаменатели дробей мы всё равно будем раскладывать на множители для нахождения общего знаменателя, а числители тоже будем пытаться раскладывать на множители — для того, чтобы выяснить, не сокращаются ли дроби.

В рациональных выражениях встречаются конструкции, которые иногда образно называют «многоэтажными дробями». Скажем, из следующих трёх выражений

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{m};\quad \frac{n}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}};\quad \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{m}{n}+\frac{u}{v}}$$

первое и второе можно назвать «трёхэтажными» дробями, а третье — «четырёхэтажной» дробью.

Работать с «многоэтажной» дробью можно в три действия: выполнить отдельно преобразования в числителе, отдельно в знаменателе, а затем разделить первое выражение на второе.

Упростим для примера дробь:

$$\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}}.$$

Сначала выполним преобразования в числителе:

1) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}=\frac{b^2+a^2+2ab-4c^2}{a^2b^2}=$

(поскольку далее нам придётся выполнять с полученной дробью операцию деления, разложим числитель на множители, заметив, что он является разностью квадратов)

$$=\frac{(a+b)^2-(2c)^2}{a^2b^2}=\frac{(a+b-2c)(a+b+2c)}{a^2b^2}.$$

Теперь выполним преобразования в знаменателе:

2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}=\dfrac{b+a-2c}{ab}$.

Наконец разделим первое выражение на второе:

3) $\dfrac{(a+b-2c)(a+b+2c)}{a^2b^2}:\dfrac{b+a-2c}{ab}=\dfrac{(a+b-2c)(a+b+2c)}{a^2b^2}\cdot\dfrac{ab}{b+a-2c}=$

$$=\frac{\cancel{(a+b-2c)}(a+b+2c)\cancel{a}\,\cancel{b}}{a^{\cancel{2}^1}b^{\cancel{2}^1}\cancel{(b+a-2c)}}=\frac{a+b+2c}{ab}.$$

Другой подход к работе с многоэтажной дробью базируется на основном свойстве алгебраических дробей. Если числитель и знаменатель алгебраической дроби одновременно умножить или разделить на ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной. При преобразовании многоэтажной дроби её числитель и знаменатель удобно умножать на общий знаменатель всех «мелких» дробей. Ясно, что при умножении каждой «мелкой» дроби на общий знаменатель её с ещё какими-то дробями получится целое выражение и, таким образом, дробь перестанет быть «многоэтажной». Проделаем это в рассмотренном выше примере:

$$\frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}}=\frac{\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}\right)a^2b^2}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}\right)a^2b^2}=$$

(обратите внимание, что в знаменателе мы перемножаем со скобкой только ab, оставляя также ab за скобкой)

$$=\frac{b^2+a^2+2ab-4c^2}{(b+a-2c)ab}=\frac{\cancel{(a+b-2c)}(a+b+2c)}{\cancel{(b+a-2c)}ab}=\frac{a+b+2c}{ab}.$$

Второе решение оказалось заметно короче, чем первое.

При доказательстве тождеств, содержащих дробные алгебраические выражения, применяются те же приёмы, что применялись и ранее для доказательства тождеств с целыми выражениями. Напомним их:

1) Если одна часть тождества заметно более громоздкая, чем другая, то можно выполнять тождественные преобразования более громоздкой части, пока не получится менее громоздкая.

2) Если обе части доказываемого тождества мало отличаются друг от друга с точки зрения громоздкости, то можно начать выполнять тождественные преобразования одной из частей и делать это, пока возможно. В результате мы остановимся на некотором выражении (тождественно равном той части, которую преобразовывали). После этого можно выполнять тождественные преобразования

другой части доказываемого тождества, пока это удаётся. В результате мы тоже остановимся на некотором выражении (тождественно равном этой другой части). Если выражения, на которых мы остановились, одинаковы, то тождество доказано, поскольку два выражения, тождественно равные третьему, тождественно равны между собой.

3) Можно составить разность левой и правой частей тождества и выполнять её тождественные преобразования до тех пор, пока не получится нуль.

Кроме этого, для доказательства тождеств, содержащих дробные выражения, можно также воспользоваться тем, что $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, в том и только в том случае, когда $AD=BC$. Это соображение позволит свести доказательство тождества для дробных алгебраических выражений к доказательству тождества для целых алгебраических выражений.

Развиваем умения

Н

1 Упростите выражение:

а) $6y-\frac{2x}{x+2y}\cdot\frac{3x+6y}{x}$;

б) $8t^2+\frac{t^3}{2y+1}\cdot\frac{2ty+t}{t^2}$;

в) $\frac{ij+i}{kj-k}:\frac{j+1}{j-1}-\frac{i}{k}$;

г) $\frac{5x+25}{y}:\frac{x+5}{yx}+5x$;

д) $k^2m^2-\frac{k^2m^2+k^2}{k^2+1}\cdot\frac{k^2m^2+m^2}{m^2+1}$;

е) $z^2+\frac{z^2+z}{1+z}\cdot\frac{1-z}{z-z^2}$;

ж) $\frac{a^2-b^2}{a+b}:\frac{a-b}{a+b}-b$;

з) $\frac{xy+yz}{xh+hz}:\frac{y}{h}+\frac{h}{y}$.

2 Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}$;

б) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}\right):\frac{1}{x^2-2x}$;

в) $\left(\frac{1}{u+v}-\frac{1}{u-v}\right)\cdot\frac{u+v}{2v}$;

г) $\left(\frac{1}{2i+j}+\frac{1}{2i-3j}\right):\frac{2i-j}{4i+2j}$;

д) $\left(\frac{s+1}{s+2}+\frac{s+2}{s+3}\right)\cdot\frac{2+s}{7+8s+2s^2}$;

е) $\left(\frac{f+2g}{f+1}-\frac{gf}{g+1}\right):\frac{-f-2g+f^2g-2g^2}{(1+f)(1+g)}$;

ж) $\left(\frac{n+m}{m}-\frac{n-m}{n}\right)\cdot\frac{mn}{m^2+n^2}$;

з) $\left(\frac{pqr}{pqr-1}+\frac{pqr+1}{pqr}\right):\frac{2p^2q^2r^2-1}{pqr-1}$.

3 Преобразуйте в алгебраическую дробь:

а) $\left(\dfrac{x+y}{x}-\dfrac{2y}{x+y}\right)(x+y)$;

б) $\left(\dfrac{s}{s-1}-\dfrac{s}{s+1}\right)\left(\dfrac{1}{2s}-\dfrac{s}{2}\right)$;

в) $\left(\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{2d+3}\right)\left(\dfrac{d}{d-1}-\dfrac{3d-2d^3}{3d^2-3}\right)$;

г) $\left(\dfrac{l}{l+1}+\dfrac{l}{2l+1}\right)\left(\dfrac{l}{l+1}+\dfrac{1+2l}{l+l^2}\right)$;

д) $\left(\dfrac{t+2}{t}-\dfrac{t-2}{t+2}\right):\left(t+\dfrac{1-2t-t^2}{2+t}\right)$;

е) $\left(\dfrac{2h}{3g}-\dfrac{5g}{4h}\right):\left(\dfrac{g}{h}-\dfrac{g-1}{h}\right)$;

ж) $\left(t+\dfrac{1}{f}\right):\left(\dfrac{1}{t+f}-\dfrac{2+ft}{f+t}\right)$;

з) $\left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}\right):\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{pq+pr-qr}{pqr}\right)$.

4 Упростите выражение:

а) $\left(x-\dfrac{x}{x-2}\right):\left(x-\dfrac{4x-9}{x-2}\right)$;

б) $\left(z-\dfrac{z}{z+5}\right):\left(z+\dfrac{1-5z-z^2}{5+z}\right)$;

в) $\left(t+\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right):\left(t-\dfrac{1-t-t^2}{t^2}\right)$;

г) $\left(h-\dfrac{h}{h+m}\right)\left(h+\dfrac{1-h^2}{h}\right)$;

д) $\left(r+\dfrac{1}{r+r^2}\right)\left(r-\dfrac{r^2-1-r}{r}\right)$;

е) $\left(j+\dfrac{j^2+1}{j^2}\right)\left(j+\dfrac{-j^3(1+j)}{1+j^2+j^3}\right)$.

Н

5 Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right):\left(\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}\right)$;

б) $\left(\dfrac{h+1}{h}+\dfrac{h}{2h+1}\right)\left(\dfrac{h+1}{h}-\dfrac{2+h}{h}\right)$;

в) $\left(\dfrac{m+1}{m+2}-\dfrac{m+2}{m+1}\right):\left(\dfrac{m+1}{m+2}-\dfrac{4+3m}{2+m}\right)$;

г) $\left(\dfrac{l-2}{l+5}+\dfrac{2l-1}{2l+1}\right)\left(\dfrac{l-5}{l+2}-\dfrac{6l-3+2l^2}{2+l}\right)$;

д) $\left(\dfrac{2m}{2+m}-\dfrac{m^2}{n-m}\right)\left(\dfrac{4}{m}-\dfrac{m+2}{m}\right)$;

е) $\left(\dfrac{j^3+1}{j}+\dfrac{j}{j^3+1}\right)\left(\dfrac{j^3+1}{j^3-1}+\dfrac{j^3}{1-j^3}\right)$.

6 Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{n}{m^2+mn}-\dfrac{1}{m+n}\right)\left(\dfrac{m^2}{m^2n-n^3}-\dfrac{m}{mn-n^2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{2s}{s-k}+\dfrac{2k+s}{2k-s}\right)\left(\dfrac{5s}{k}+\dfrac{1-10k^2s+25ks^2-5s^3}{2k^3-5k^2s+ks^2}\right)$;

в) $\left(\frac{q}{2q+w}-\frac{w^2}{1-w}\right)\left(\frac{2q+w}{w-1}-\frac{1-2q-3w+w^2}{1-w}\right)$;

г) $\left(\frac{t^2+t^5}{t+3}-\frac{t^5}{5t-3}\right)\left(\frac{t}{t-1}+\frac{3-5t-t^3}{(t-1)t^2}\right)$;

д) $\left(\frac{g+2}{g}-\frac{g+5}{g}\right)\left(\frac{g+8}{g}-\frac{9+g}{g}\right)$;

е) $\left(\frac{1}{1+s+s^2}-\frac{1}{1+s-s^2}\right)\left(\frac{1}{1-s-s^2}-\frac{s^4-3s^2}{s+s^2-1}\right)$.

7 Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{2a-5b}+\frac{2}{2a+b}+\frac{3}{2a-b}\right):\frac{b^2}{4a^2-b^2}$;

б) $\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\right):\frac{1-2s-s^2}{6+5s+s^2}$;

в) $\left(\frac{2x+2}{x}-\frac{2x+3}{x^2}-\frac{2x-3}{x^3}\right):\frac{x-1}{x^3}$;

г) $\left(\frac{k+l}{k}-\frac{k}{k+l}-k\frac{k-l}{k+l}\right):\frac{l^2-k^3+2kl+k^2l}{k+l}$;

д) $\left(\frac{h}{h-1}-\frac{2h^2}{h^2-1}+\frac{h^3}{h+1}\right):\frac{h^3}{h^2-h}$;

е) $\left(\frac{z^2+z+1}{z^2+z-1}+\frac{z^2+z}{z^2-z}-\frac{1}{z}\right):\frac{2z^4+z^3-1}{z^3-2z+1}$.

8 Установите, какие из равенств не являются тождествами, и объясните почему:

а) $\frac{(m+5)^2}{(m-5)^2}=\left(\frac{m+5}{m-5}\right)^2$;

б) $\frac{4t+2}{2t+1}=2$;

в) $(a+b)^3\cdot\frac{1}{b^3}=\left(\frac{a}{b}+1\right)^3$;

г) $2+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^2}=\frac{3-5x-2x^3}{x^3}$;

д) $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=2xy$;

е) $\frac{k^3}{k+l}+\frac{2kl}{k+l}+\frac{k^2l}{k+l}=\frac{k^3+2kl+k^2l}{k+l}$;

ж) $(g+h)^2-gh=(g-h)^2$;

з) $\frac{1+z^2+z^3}{z+z^3}=\frac{1}{z}+\frac{z}{z+\frac{1}{z}}$.

9 Докажите тождество:

а) $\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{6x}{x^2-1}$;

б) $\dfrac{(a+b)^3}{(a-b)^2}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{(a+b)^2}{a-b}$;

в) $\dfrac{u+uU+v+Uv}{-u+uU-v+Uv}:\dfrac{1+U}{U-1}=1$;

г) $\dfrac{h}{h-x}+\dfrac{x-h}{h}=\dfrac{2x}{h-x}-\dfrac{x^2}{h(h-x)}$;

д) $\dfrac{q^3+p^3}{q^3-p^3}-\dfrac{p-q}{p+q}=2\dfrac{p^4+q^4}{q^4-p^4+pq^3-p^3q}$;

е) $\dfrac{1+2z+2z^2+z^3}{1-2z+z^3}\cdot\dfrac{z^2+z-1}{z^2+z+1}=\dfrac{1+z}{z-1}$;

ж) $\dfrac{2s-2x-sx+x^2}{4s-2x-2sx+x^2}:\dfrac{x-s}{x-2s}=1$;

з) $\dfrac{z+\dfrac{1}{z+1}}{z+\dfrac{1}{z+1}}+\dfrac{z-\dfrac{1}{z+1}}{z-\dfrac{1}{z-1}}=\dfrac{2z^3}{z^3-2z-1}-\dfrac{4z}{z^3-2z-1}$.

10 Докажите тождество:

а) $\left(\dfrac{1}{m+n}-\dfrac{1}{m-n}\right)(m^2-2mn+n^2)=\dfrac{2n(m-n)}{m+n}$;

б) $\dfrac{-1+x^2+2x^3+x^4}{2+3x+4x^2+2x^3+x^4}:\dfrac{2-3x-2x^2+2x^3+x^4}{-6+x+2x^2+2x^3+x^4}=\dfrac{3+x+x^2}{2+x+x^2}$;

в) $\dfrac{s^4+s+1}{s^4+s+1}+\dfrac{s^4+s-1}{s^4-s+1}=\dfrac{2s^4}{1-s+s^4}$;

г) $\left(\dfrac{n+m+1}{n+m-1}+\dfrac{n+m}{n-m}\right):\left(\dfrac{n+m-1}{n+m+1}+\dfrac{n-m}{n+m}\right)=\dfrac{(n+m)(n+m+1)}{(n-m)(n+m-1)}$;

д) $\dfrac{(i+1)^3+(i-1)^3}{(i+1)^3-(i-1)^3}+\dfrac{(i+1)^2+(i-1)^2}{(i+1)^2-(i-1)^2}=\dfrac{1+10i^2+5i^4}{2i(1+3i^2)}$;

е) $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}-\dfrac{a-b-c}{a-b+c}=\dfrac{4ac}{(a+b-c)(a-b+c)}$.

П

11 Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^2+ax-bx-ab}{x^2-ax+bx-ab}:\dfrac{x^2+ax+bx+ab}{x^2-ax-bx+ab}$;

б) $\dfrac{f^2+2fg+g^2+3fh+3gh+2h^2}{f^2+2fg+g^2+4fh+4gh+3h^2}:\dfrac{f^2-g^2+3fh-gh+2h^2}{f^2+2fg+g^2+2fh+2gh-3h^2}$;

в) $\left(\dfrac{1+x+x^2+x^3}{-1+x-x^2+x^3}-\dfrac{-1+x-x^2+x^3}{1+x+x^2+x^3}\right):\left(\dfrac{1-x-x^2+x^3}{1+x+x^2+x^3}-\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1-x-x^2+x^3}\right)$;

г) $\left(\left(h+\dfrac{1}{h-\dfrac{1}{h}}\right):\left(h+\dfrac{2}{h-\dfrac{2}{h}}\right)-\left(h+\dfrac{3}{h-\dfrac{3}{h}}\right):\left(h+\dfrac{4}{h-\dfrac{4}{h}}\right)\right):\dfrac{2}{3-4h^2+h^4}$;

д) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$;

е) $\dfrac{\dfrac{u}{u+v+w}-\dfrac{u+v+w}{u}}{\dfrac{v}{u+v+w}-\dfrac{u+v+w}{v}}\cdot\dfrac{\dfrac{v}{u+v-w}-\dfrac{u+v-w}{v}}{\dfrac{u}{u+v+w}-\dfrac{u+v+w}{u}}$;

ж) $\left(\dfrac{1}{6-5i+i^2}-\dfrac{5+66i-59i^2+12i^3}{(6-5i+i^2)(35+5i-18i^2+i^3+i^4)}\right)\left(\dfrac{1}{6-5i+i^2}+\dfrac{5+6i+i^2}{5-6i+i^2}\right)$;

з) $\left(\dfrac{u+u^5}{(u^5-u^4+u-1)(1+u+u^2+u^3)}-\dfrac{1}{(1+u)(1+u^2)}\right)\times$

$\times\left(\dfrac{1-u^2+2u^4}{(u^2-1)(1+u^2+u^4+u^6)}-\dfrac{u^2}{(1+u^2)(1+u^4)}\right)$.

12 Докажите тождество:

а) $\dfrac{2a^2-a}{4a^2+1-4a}-\dfrac{2a^2+a}{4a^2+1+4a}=\dfrac{1}{4a^2-1}+\dfrac{1}{2a+1}$;

б) $\dfrac{x^2-3xy+2y^2}{6x^2-7xy+2y^2}\cdot\dfrac{6x^2-7xy+2y^2}{2x+3x^2-2y-3xy}=\dfrac{x-2y}{2+3x}$;

в) $\dfrac{2j^2+3ij^2+i^2j^2}{2j^2+5ij^2+2i^2j^2}:\dfrac{-3j^2-5ij^2+2i^2j^2}{-3j^2-2ij^2+i^2j^2}=\left(\dfrac{1+i}{1+2i}\right)^2$;

г) $\dfrac{4}{2+3k^2+k^4}+\dfrac{k^4-8}{6+11k^2+6k^4+k^6}=\dfrac{2+k^2}{3+4k^2+k^4}$;

д) $\dfrac{\dfrac{1}{t^2}+t^2+1}{t^2-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{2}{t}-1}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{t^2}+t^2-3}{t^2-\dfrac{1}{t^2}-2t+1}=\dfrac{1+t+t^2}{1-t+t^2}$;

е) $\dfrac{h^{16}}{h^{16}+2h^{17}+h^{18}}+\dfrac{h^{18}-h^{17}}{h^{19}+h^{18}-h^{17}-h^{16}}=\dfrac{1}{1+h}$.

13 а) Найдите $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, если $x+\dfrac{1}{x}=5$.

б) Найдите $x^3+\dfrac{1}{x^3}$, если $x+\dfrac{1}{x}=5$.

в) Найдите $x^4+\dfrac{1}{x^4}$, если $x+\dfrac{1}{x}=5$.

М

14 Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+c^3a-ca^3}{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2}$;

б) $\dfrac{x^7-14x^5+49x^3-36x}{x^7+3x^6-5x^5-15x^4+4x^3+12x^2}$;

в) $\dfrac{u^6+u^5v+u^4v^2+2u^3v^3+u^2v^4+uv^5+v^6}{u^6-u^5v+u^4v^2-u^2v^4+uv^5-v^6}$;

г) $\dfrac{p^2+2pq+q^2+2pr+2qr+r^2-s^2}{p^2-q^2+2pr+r^2+2ps+2rs+s^2}$.

М

15 Докажите тождество:

а) $\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}$;

б) $\dfrac{t(x-y)(y-z)+y(x-t)(z-t)}{z(x-y)(x-t)+x(y-z)(z-t)}=\dfrac{y-t}{x-z}$;

в) $p^2\dfrac{(x-q)(x-r)}{(p-q)(p-r)}+q^2\dfrac{(x-r)(x-p)}{(q-r)(q-p)}+r^2\dfrac{(x-p)(x-q)}{(r-p)(r-q)}=x^2$;

г) $\dfrac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-c^4-b^4}{(c^2-a^2-b^2+2ab)(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc)}=\dfrac{a+b+c}{a+b-c}$.

16 Докажите, что если $x+y+z=1$ и $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$, то $x^2+y^2+z^2=1$.

17 Докажите или опровергните утверждение:

Если $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$, то и $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$.

Верно ли обратное утверждение?

1.6 Степень с целым показателем

Знакомимся с новой темой

На уроках математики в 5-м классе вы познакомились со степенями с натуральным показателем, а на уроках алгебры в 7-м классе подробно изучили их. Вспомним, что для натурального числа $n>1$

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}.$$

Если показатель степени равен 1, то $a^1=a$.

При этом выполняются пять основных свойств степеней:

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
2) $a^m:a^n=a^{m-n}$ при $m>n$ и $a\neq 0$;
3) $a^m\cdot b^m=(ab)^m$;
4) $a^m:b^m=(a:b)^m$ при $b\neq 0$;
5) $(a^m)^n=a^{mn}$.

Можно ли определить степени, если показатель степени равен нулю или является отрицательным целым числом?

Если хорошенько вспомнить, в такой ситуации вы уже оказывались ранее при изучении математики, причём даже не один раз.

Скажем, когда на уроках математики в 6-м классе вы знакомились с отрицательными числами, то правила выполнения арифметических операций с ними были вам неизвестны и их надо было определять. Можно приводить много разных аргументов, почему правила этих операций определяются именно так, а не иначе, причём разные математики в разные времена приводили довольно сильно отличающиеся аргументы. Но основной аргумент, причём в самых разных ситуациях, такой: если мы хотим уже знакомую нам для некоторого числового множества операцию определить для более широкого числового множества (скажем, операцию сложения, знакомую нам для натуральных чисел и нуля, хотим определить для более широкого множества целых чисел), то крайне желательно это сделать так, чтобы привычные для начального множества основные свойства этой операции выполнялись и для более широкого множества (если это вообще возможно). Скажем, операция сложения для множества, состоящего из натуральных чисел и нуля, подчиняется переместительному и сочетательному законам. Значит, определять её для более широкого множества, состоящего из всех целых чисел, крайне желательно так, чтобы эти законы тоже выполнялись. И вы знаете, что при определении операции сложения известным вам образом этого удаётся достичь.

Попробуем, основываясь на этих соображениях, понять сначала, как разумно было бы определить степень с нулевым показателем. Вспомним формулу деления степеней с натуральными показателями. Для любого действительного числа a и любых натуральных чисел m и n, таких, что $m > n$,

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Этой формуле соответствует правило: «При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатель равен разности показателей делимого и делителя», или кратко: «При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются».

Если мы хотим, чтобы это правило выполнялось при всех целых m и n, значит, оно должно выполняться и при $m = n$, т. е. должно быть:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Но понятно, что $a^n : a^n = 1$, так как это частное двух одинаковых чисел.

Таким образом, учитывая всё вышесказанное, необходимо выполнение равенства $a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

Это же соображение подскажет нам, как разумно определить для ненулевого числа степень с целым отрицательным показателем.

Рассмотрим, к примеру, частное $a^3 : a^5$ при $a \neq 0$. Если мы хотим, чтобы при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитались, то должно быть $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$.

В то же время, если записать частное $a^3 : a^5$ в виде дроби, а затем сократить эту дробь, то получим:

$$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}.$$

Таким образом, учитывая всё вышесказанное, необходимо выполнение равенства $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ при $a \neq 0$.

Проводя такое же рассуждение, можно прийти к необходимости при $a \neq 0$ равенства $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ для всех других натуральных n (т. е. для всех целых отрицательных $-n$).

Но здесь нужно отдавать себе отчёт, что рассмотренные выше рассуждения — это только наводящие соображения, а вовсе не строгие обоснования и тем более не доказательства.

Приступим к аккуратным определениям.

Ненулевое число в нулевой степени равно единице.

Запишем это с помощью формулы:

$$a^0 = 1 \text{ при } a \neq 0.$$

Ненулевое число в целой отрицательной степени равно единице, делённой на это же число в противоположной (натуральной) степени.

Это можно записать с помощью формулы:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ при целом отрицательном } -n \text{ и } a \neq 0.$$

Например:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

Последний пример, по сути, показывает, что целую отрицательную степень дроби удобно находить по формуле:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Таким образом, мы теперь можем возвести число в степень с любым целым показателем (при этом если показатель степени положителен, то основание может быть любым действительным числом, а если показатель степени отрицателен или равен нулю, то основание не должно равняться нулю).

Оказывается, что для степеней с целыми показателями будут справедливыми формулы, упомянутые в начале параграфа (при всех действительных a и b, таких, что $a \neq 0$; $b \neq 0$):

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;
3) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$;
4) $a^m : b^m = (a : b)^m$;
5) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Доказательство справедливости выписанных формул представляет собой достаточно кропотливую работу. Обсудим, как можно доказать, скажем, первую формулу. Основная трудность такого доказательства заключается в необходимости отдельного рассмотрения большого количества различных случаев.

При $m > 0$ и $n > 0$ мы доказали эту формулу в 7-м классе.

В остальных случаях можно преобразовывать отдельно левую часть и правую часть формулы.

При $m < 0$ и $n < 0$ сначала обозначим $m = -p$ и $n = -q$, тогда $p > 0$ и $q > 0$.

Левая часть преобразуется так:

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}},$$

а правая часть преобразуется так:

$$a^{m+n} = a^{-p-q} = a^{-(p+q)} = \frac{1}{a^{p+q}},$$

и для этого случая формула доказана.

Рассмотрев все возможные случаи для m и n (а некоторые из них придётся ещё разбивать на «подслучаи»), применяя определение и уже доказанные свойства, мы завершили бы доказательство. Желающие могут сделать это самостоятельно.

На уроках алгебры в 7-м классе, изучая степени с натуральными показателями, вы научились записывать натуральные числа в виде разрядных слагаемых с помощью натуральных степеней десятки, например:

$58\ 374 = 50\ 000 + 8000 + 300 + 70 + 4$,

или: $58\ 374 = 5 \cdot 10\ 000 + 8 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4$,

или: $58\ 374 = 5 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$.

Теперь с помощью целых степеней десятки мы сможем записывать в виде суммы разрядных слагаемых также и десятичные дроби, например:

$732{,}945 = 700 + 30 + 2 + 0{,}9 + 0{,}02 + 0{,}005$,

или: $732{,}945 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 + 9 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}01 + 5 \cdot 0{,}001$,

или: $732{,}945 = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 + 9 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.

В 7-м классе вы научились также с помощью натуральных степеней числа 10 записывать очень большие положительные числа. Например, масса Луны составляет $7{,}348 \cdot 10^{22}$ кг, а её объём составляет $2{,}2 \cdot 10^{19}$ м^3. Такой вид числа называется стандартным видом.

Теперь мы научимся с помощью целых отрицательных степеней числа 10 записывать очень маленькие положительные числа. Например, масса элементарной частицы нейтрона составляет $1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг.

Такой вид очень маленьких чисел тоже называется стандартным видом.

Если записать массу нейтрона в килограммах без использования стандартного вида числа, то получится:

$$0{,}000000000000000000000000001675.$$

Такая запись очень громоздкая, и работать с ней неудобно (не говоря о том, что трудности начинаются уже с прочтения этого числа).

Рассмотрим ещё несколько примеров записи маленьких чисел в стандартном виде:

$$0{,}0000000023 = 2{,}3 \cdot 10^{-9};\ 0{,}000419 = 4{,}19 \cdot 10^{-4},\ 0{,}0000009 = 9 \cdot 10^{-7}.$$

Стандартный вид положительного числа, меньшего 1, следующий: $x \cdot 10^n$, где $1 \leqslant x < 10$, а n — целое отрицательное число.

Таким образом, можно сказать, что стандартный вид любого положительного числа: $x \cdot 10^n$, где $1 \leqslant x < 10$, а n — целое число. При этом показатель степени n в стандартном виде числа называется *порядком* этого числа. Заметим, что для чисел, лежащих в пределах от 1 до 10, множитель 10^0 обычно не пишут.

Поговорим также немного о тождественных преобразованиях выражений, содержащих степени с целыми показателями (ясно, что наибольший интерес для нас представляют целые отрицательные показатели степеней, поскольку с целыми положительными мы уже хорошо знакомы).

Упростим, к примеру, выражение $\dfrac{a^{-2} - 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}}{a^{-2} - b^{-2}}$.

Быстрее всего мы придём к цели, если умножим одновременно числитель и знаменатель на a^2b^2, после чего попросту раскроем скобки в числителе и знаменателе:

$$\frac{\left(a^{-2} - 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}\right)a^2b^2}{\left(a^{-2} - b^{-2}\right)a^2b^2} = \frac{a^{-2}a^2b^2 - 2a^{-1}b^{-1}a^2b^2 + b^{-2}a^2b^2}{a^{-2}a^2b^2 - b^{-2}a^2b^2} =$$

$$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{b^2 - a^2} = \frac{(b-a)^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{(b-a)}(b+a)} = \frac{b-a}{b+a}.$$

Обратите внимание, что выражение, на которое мы умножали числитель и знаменатель, было подобрано так, что после раскрытия скобок степеней с отрицательными показателями уже не было.

Полезно также научиться замечать в выражениях, стоящих в числителе и знаменателе, формулы сокращённого умножения:

$$a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}=\left(a^{-1}\right)^2-2a^{-1}\cdot b^{-1}+\left(b^{-1}\right)^2=\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^2;$$

$$a^{-2}-b^{-2}=\left(a^{-1}\right)^2-\left(b^{-1}\right)^2=\left(a^{-1}-b^{-1}\right)\left(a^{-1}+b^{-1}\right).$$

Тогда получим:

$$\frac{a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}=\frac{\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{\left(a^{-1}-b^{-1}\right)}\left(a^{-1}+b^{-1}\right)}=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}.$$

Впрочем, чтобы двигаться дальше, всё равно придётся умножать числитель и знаменатель на ab:

$$\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}=\frac{\left(a^{-1}-b^{-1}\right)ab}{\left(a^{-1}+b^{-1}\right)ab}=\frac{a^{-1}ab-b^{-1}ab}{a^{-1}ab+b^{-1}ab}=\frac{b-a}{b+a}.$$

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.

а) Ненулевое число в нулевой степени равно … .

б) Ненулевое число в целой отрицательной степени равно … .

в) Стандартный вид положительного числа следующий: … .

г) Порядком положительного числа, записанного в стандартном виде, называется … .

2 Закончите предложение.

а) При умножении степеней с одинаковыми ненулевыми основаниями и целыми показателями … .

б) При делении степеней с одинаковыми ненулевыми основаниями и целыми показателями … .

в) При умножении степеней с ненулевыми основаниями и одинаковыми целыми показателями … .

г) При делении степеней с ненулевыми основаниями и одинаковыми целыми показателями … .

д) При возведении целой степени ненулевого числа в целую степень … .

3 Установите порядок выполнения действий и найдите значение выражения:

а) $3\cdot5^{-2}+4{,}5:3^3$;

б) $7\cdot7^{-1}-9^{-1}:9^{-1}$;

в) $4^{-1}\cdot2+5\cdot2^{-1}$;

г) $9^2:3^{-1}-3^4\cdot3$;

д) $0{,}1:(0{,}01)^{-2}-(0{,}1)^5$;

е) $5{,}5:(0{,}5)^2-2^{-2}:(0{,}25)^2$;

ж) $8^{-8}\cdot8^{10}+12^2:2^2$;

з) $81:3^3-81^{-2}:3^{-8}$.

4 Запишите произведение в виде степени:

а) $a^{-5} \cdot a^{2}$; в) $z^{2} \cdot z^{-9}$; д) $w^{18} \cdot w^{-17}$; ж) $u^{123} \cdot w^{-321}$;

б) $x^{-9} \cdot x^{18}$; г) $q^{5} \cdot q^{-5}$; е) $p^{17} \cdot p^{7}$; з) $n^{-100} \cdot n^{-75}$.

5 Запишите произведение в виде степени:

а) $a^{-6}a^{-4}$; д) $g^{13} \cdot g^{-21} \cdot g^{-15}$;

б) $m^{-3}m^{8}m^{-2}$; е) $w^{-32} \cdot w^{-24} \cdot w^{-14}$;

в) $l^{-32} \cdot l^{9} \cdot l^{35}$; ж) $d^{5} \cdot d^{-11} \cdot d^{27}$;

г) $h^{-14} \cdot h^{-15} \cdot h^{38}$; з) $p^{-8} \cdot p^{7} \cdot p^{24}$.

6 Представьте в виде степени:

а) $2^{3} \cdot \frac{1}{16}$; в) $7^{19} \cdot \frac{1}{7^{22}}$; д) $\frac{1}{11^{11}} \cdot 11^{2}$; ж) $10^{10} \cdot \frac{1000}{10^{50}}$;

б) $3^{5} \cdot \frac{1}{81}$; г) $9^{3} \cdot \frac{1}{6561}$; е) $\frac{13^{14}}{13^{21}} \cdot 13^{5}$; з) $3^{3} \cdot \frac{27}{9^{10}}$.

7 Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{7} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$; в) $(0{,}1)^{-19} \cdot (0{,}1)^{18}$; д) $(0{,}3)^{-18} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{-20}$;

б) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{4}$; г) $\left(\frac{1}{11^{-1}}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{-5}$; е) $\left(\frac{21}{22}\right)^{-22} \cdot \left(\frac{21}{22}\right)^{21}$.

8 Упростите выражение:

а) $7 \cdot 7^{-4} \cdot 7^{5}$; д) $11^{-14} \cdot 11^{-12} \cdot 11^{-21}$;

б) $2^{-42} \cdot 2^{26} \cdot 2^{-32}$; е) $10^{-5} \cdot 10^{20} \cdot 10^{-38}$;

в) $5^{9} \cdot 5^{-8} \cdot 5^{-48}$; ж) $12^{-6} \cdot 6^{-18} \cdot 6^{29}$;

г) $6^{-24} \cdot 6^{39} \cdot 6^{-33}$; з) $17^{29} \cdot 17^{-18} \cdot 17^{-10}$.

9 Запишите частное в виде степени:

а) $a^{-5} : a^{-4}$; в) $c^{46} : c^{-44}$; д) $e^{-23} : e^{7}$; ж) $g^{47} : g^{-18}$;

б) $b^{17} : b^{-19}$; г) $d^{-21} : d^{-36}$; е) $f^{-26} : f^{-44}$; з) $h^{-9} : h^{2}$.

Н

10 Найдите значение выражения:

а) $\frac{2^{-5} \cdot 2^{-6}}{2^{-10}}$; в) $\frac{3^{12} \cdot 3^{-15}}{3^{-10} \cdot 81}$; д) $\frac{3^{-50} \cdot 81 \cdot 2^{-23}}{18^{-23}}$;

б) $\frac{2^{-8} \cdot 5^{-8}}{10^{-9}}$; г) $\frac{7^{12} \cdot 7^{-9}}{343}$; е) $\frac{19^{33} \cdot 19^{-14}}{19^{18}}$.

11 Запишите произведение в виде степени:

а) $3\cdot\dfrac{1}{27}\cdot 81$;

б) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{1}{64}\cdot\dfrac{1}{128}$;

в) $7^{14}\cdot\dfrac{1}{343^3}\cdot 49^{-3}$;

г) $9^{-2}\cdot\dfrac{1}{3^{19}}\cdot 3^{20}$;

д) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{81}\cdot\dfrac{1}{243}$;

е) $11^{-5}\cdot\dfrac{121^6}{1331^2}\cdot\dfrac{1}{11^{-3}}$;

ж) $125^5\cdot\dfrac{5^2}{5^{-5}}\cdot\dfrac{5^{-1}}{25^{-2}}$;

з) $\dfrac{12^{-5}}{144^{-4}}\cdot 12^{-9}\cdot 12^{20}$.

12 Выполните возведение в степень:

а) $\left(a^3c^{-4}\right)^{-3}$;

б) $(9l)^{-2}$;

в) $\left(3z^3\right)^{-4}$;

г) $\left(2fy^2\right)^{-8}$;

д) $\left(-5b^2f^2m^2\right)^{-2}$;

е) $\left(6hr^3s^2\right)^{-1}$.

13 Выполните действия:

а) $\left(-a^3b^{-2}c\right)^3$;

б) $\left(\left(x^{-3}\right)^{-3}\right)^{-3}$;

в) $\left(\left(z^2h^{-2}j^{-3}\right)^2 j^6\right)^{-3}$;

г) $\left(a^{-4}g^{-3}k^{-5}\right)^7$;

д) $125\left((5u)^3 u^{-3}\right)^{-1}$;

е) $\left(-e^2x^4c^{-5}t^{-2}\right)^{-7}$.

14 Найдите степень дроби:

а) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$;

б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$;

в) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$;

г) $\left(\dfrac{7}{2}\right)^{-3}$;

д) $\left(-\dfrac{11}{13}\right)^{-2}$;

е) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$;

ж) $\left(\dfrac{5}{12}\right)^{-2}$;

з) $\left(\dfrac{10}{3}\right)^{-4}$.

15 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{12^{-5}}{6^{-5}}$;

б) $\dfrac{8^{-9}}{2^{-27}}$;

в) $\dfrac{11^{-7}}{121^{-3}}$;

г) $\dfrac{13^{-15}}{169^{-7}}$;

д) $\dfrac{18^{-10}}{2^{-10}3^{-21}}$;

е) $\dfrac{5^{-31}3^{-31}2^{-29}}{30^{-30}}$;

ж) $\dfrac{3^{-11}}{81^{-3}}$;

з) $\dfrac{20^{-20}}{10^{-21}2^{-21}}$.

16 Запишите в виде степени с основанием a:

а) $\left(a^{-5}\right)^3$;

б) $\left(a^{-6}\right)^4$;

в) $\left(a^{-7}\right)^{-1}$;

г) $\left(a^8\right)^{-9}$;

д) $\left(a^2\right)^{-12}$;

е) $\left(a^{-11}\right)^{-13}$;

ж) $\left(a^{-124}\right)^0$;

з) $\left(a^{10}\right)^{-10}$.

17 Запишите в виде степени с основанием 3:

а) $\frac{1}{27}$; в) $\frac{1}{243}$; д) $\frac{27}{2187}$; ж) $\frac{3^{-8}}{81}$;

б) $\left(\frac{1}{9}\right)^4$; г) $\left(-\frac{1}{81}\right)^{13}$; е) $\left(\frac{27^{-5}}{243^3}\right)^7$; з) $\left(\frac{2187^2}{9^{10}}\right)^{-5}$.

18 Найдите значение выражения:

а) $\frac{3^{-7}\cdot 2^{-7}}{6^{-5}}$; в) $\frac{2^{-20}\cdot 4^{-30}}{8^{-30}\cdot 16^3}$; д) $\frac{11^{-22}\cdot 121^{-62}}{121^{-45}\cdot 11^{-57}}$; ж) $\frac{3^{-14}\cdot 2^{-14}}{36^{-6}\cdot 18^{-2}}$;

б) $\frac{9^{-10}\cdot 81^3}{3^{-10}}$; г) $\frac{5^{-7}\cdot 25^{-22}}{5^{15}\cdot 125^{-23}}$; е) $\frac{196^{-14}\cdot 14^{-14}}{14^{-42}}$; з) $\frac{2^{-14}\cdot 5^{-6}}{4^{-6}\cdot 40^{-3}}$.

19 Используя степени, запишите в виде суммы разрядных слагаемых число:

а) 20,024; д) 807 214,273; и) 278 919,001;

б) 0,00037; е) 355,00024; к) 3 903 849,817;

в) 70 039; ж) 961,249; л) 9010,0027;

г) 45 012,86; з) 0,0000713; м) 17,37574.

20 Запишите число, заданное с помощью суммы разрядных слагаемых:

а) $9\cdot 10^3+9\cdot 10^2+9\cdot 10+7\cdot 10^{-2}+8\cdot 10^{-3}$;

б) $4\cdot 10^4+9\cdot 10^2+2\cdot 10^{-2}+8\cdot 10^{-5}$;

в) $3\cdot 10^3+9\cdot 10^2+3\cdot 10+8\cdot 10^{-1}+6\cdot 10^{-4}$;

г) $9\cdot 10^2+4\cdot 10+6\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-3}+4\cdot 10^{-4}+3\cdot 10^{-5}$;

д) $6\cdot 10^3+0\cdot 10^2+4\cdot 10+3\cdot 10^0+8\cdot 10^{-2}+9\cdot 10^{-3}+5\cdot 10^{-4}+1\cdot 10^{-5}$;

е) $1\cdot 10^3+1\cdot 10^2+3\cdot 10+1\cdot 10^{-2}+2\cdot 10^{-3}$;

ж) $5\cdot 10^6+8\cdot 10^2+1\cdot 10^0+9\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-2}+2\cdot 10^{-4}$.

21 Запишите число в стандартном виде:

а) 674 000; д) 65 329,61195;

б) 0,0012; е) 0,0069344;

в) 4202,564262; ж) 47,40156312;

г) 2007,129; з) 12 620 169,87.

22 Запишите в виде целого числа или десятичной дроби:

а) $2{,}6\cdot 10^{-5}$; д) $1{,}22\cdot 10^{-2}$;

б) $1{,}2345\cdot 10^{-3}$; е) $8{,}504\cdot 10^{-7}$;

в) $3{,}003\cdot 10^{-6}$; ж) $2{,}3\cdot 10^{-4}$;

г) $5{,}5729\cdot 10^{-1}$; з) $2{,}6002\cdot 10^{-5}$.

23 Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$;

б) $x\left(x^{-1}-\dfrac{1}{x+x^{-1}}\right)$;

в) $\dfrac{u^{-1}+v^{-1}}{u^{-1}-v^{-1}}-\dfrac{u^{-1}-v^{-1}}{u^{-1}+v^{-1}}$;

г) $\dfrac{z^{-2}+2z^{-1}+1}{\left(1+z^{-1}\right)^{3}}$;

д) $\dfrac{d^{-4}-c^{-4}}{c^{-4}-2d^{-2}c^{-2}+d^{-4}}$;

е) $h+\left(h+h^{-1}\right)^{-1}$;

ж) $\left(g-g^{-1}\right)^{-1}+\left(g+g^{-1}\right)^{-1}$;

з) $\dfrac{\left(q+q^{-1}\right)^{2}}{q^{-2}-q^{2}}$.

П

24 Упростите выражение:

а) $\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^{-1}\left(a^{-2}-b^{-2}\right)^{-1}$;

б) $\left(x+\left(x+\left(x+x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$;

в) $(x+1)^{-2}+(x+1)^{-1}-(x+1)^{0}$;

г) $\dfrac{(s-1)^{-2}-(s+1)^{-2}}{(s-1)^{-2}+(s+1)^{-2}}$;

д) $\dfrac{f^{4}+1+f^{-4}}{f^{4}-f^{-4}}$;

е) $\left(w-w(w-1)^{-1}\right)^{-2}-\left(w+\dfrac{w}{w-1}\right)^{-2}$.

25 Упростите выражение:

а) $\left(x^{2}y^{-3}+x^{-1}\right):\left(xy^{-2}-y^{-1}+x^{-1}\right):\dfrac{(x-y)^{2}+4xy}{1+x^{-1}y}$;

б) $\dfrac{6z^{-3}+11z^{-2}+6z^{-1}+1}{6z^{-3}-5z^{-2}-2z^{-1}+1}$;

в) $\dfrac{1-\dfrac{1}{v^{2}}-\dfrac{s}{u}v^{-2}+\dfrac{s}{v}-\dfrac{v^{-1}}{u}+v^{-1}u}{1+v^{-2}+\dfrac{s}{v^{2}}u^{-1}+sv^{-1}+\dfrac{u^{-1}}{v}+v^{-1}u}$;

г) $\dfrac{k^{-2}+m^{-2}-l^{2}k^{-2}m^{-2}+2k^{-1}m^{-1}}{k^{-2}-m^{-2}-2lk^{-1}m^{-2}-l^{2}k^{-2}m^{-2}}$;

д) $\dfrac{1}{x^{-1}}\dfrac{\left(x^{2}+x+1\right)^{-1}-\left(x^{2}+x-1\right)^{-1}}{\left(x^{2}-x+1\right)^{-1}-\left(x^{2}+x+1\right)^{-1}}$;

е) $\dfrac{\left(s^{-1}-s^{-2}-s^{-3}\right)^{-2}\left(s^{-1}+s^{-2}-s^{-3}\right)^{-2}}{\left(s^{-1}-s^{-2}-s^{-3}\right)^{-2}-\left(s^{-1}+s^{-2}-s^{-3}\right)^{-2}}$.

М

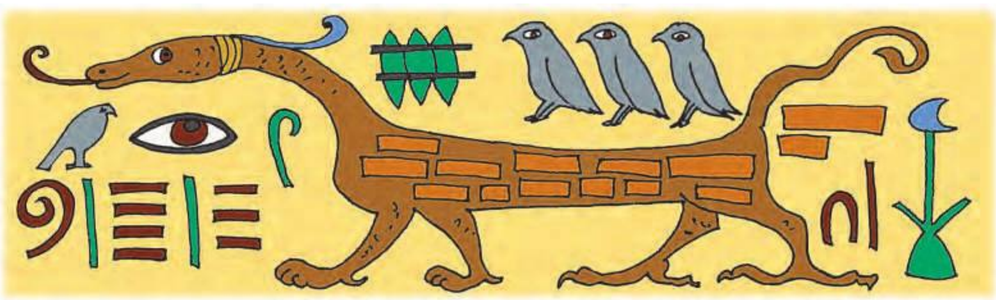
26 Докажите тождество:

$$\frac{(a-x)^{-1}-(a-y)^{-1}+x(a-x)^{-2}-y(a-x)^{-2}}{(a-x)^{-2}(a-y)^{-1}-(a-x)^{-1}(a-y)^{-2}}=2a^2-a(x+y).$$

27 Докажите, что если три числа a, b и c удовлетворяют соотношению $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=(a+b+c)^{-1}$, то сумма каких-то двух из них равна нулю.

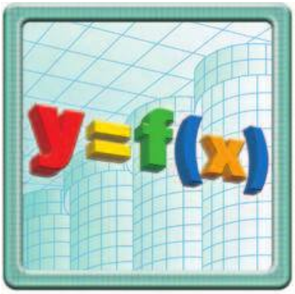
Проект «Числа-карлики и числа-гиганты»
Подготовьте доклад или компьютерную презентацию о самых маленьких и самых больших числах, встречающихся в природе, науке и технике.

Жизненная задача
СИТУАЦИЯ. Древнеегипетский способ записи обыкновенных дробей.
ВАША РОЛЬ. Историк математики.
ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Древние египтяне записывали обыкновенные дроби в виде суммы нескольких различных дробей с числителями, равными 1, и натуральными знаменателями (такие дроби в современной математике называют *аликвотными*).
ЗАДАНИЯ.
1) Запишите древнеегипетским способом обыкновенные дроби $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{7}$.
2) Докажите, что всякую обыкновенную дробь можно записать древнеегипетским способом.
3) Попробуйте выяснить, какие обыкновенные дроби можно записать в виде суммы двух аликвотных дробей.



ГЛАВА II ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИЯХ

2.1 Функции



Знакомимся с новой темой

Вы много раз встречались с ситуациями, когда значение какой-то одной величины зависит от значения другой величины. Рассмотрим несколько примеров таких ситуаций.

Пример 1. Периметр квадрата зависит от длины его стороны. Если длина стороны равна a см, а периметр равен P см, то зависимость периметра от длины стороны выражается формулой:

$$P = 4a.$$

В этой формуле очевидно $a > 0$, так как длина стороны квадрата является положительным числом. Обе величины, входящие в эту формулу, — переменные. Записанная формула позволяет для любого значения величины $a > 0$ найти соответствующее значение величины P. Значение переменной a при этом может быть выбрано произвольно, а значение переменной P *зависит* от выбранного значения переменной a. По этой причине переменную a называют *независимой переменной*, а переменную P — *зависимой переменной*. Условие $a > 0$ задаёт множество, из которого берутся значения независимой переменной a. Формула $P = 4a$ представляет собой *правило*, или *закон*, с помощью которого каждому значению независимой переменной a ставится в соответствие значение зависимой переменной P.

Скажем, если $a = 2$ см, то $P = 8$ см, если $a = 14$ см, то $P = 56$ см, и т.д.

Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что P зависит от a, принято писать $P(a)$. С помощью этого специального обозначения информация, содержащаяся в предыдущем абзаце, может быть записана в виде $P(2) = 8$, $P(14) = 56$, а формула, задающая зависимость переменной P от переменной a, может быть записана в виде:

$$P(a) = 4a.$$

Разные процессы, проистекающие в окружающем нас мире, характеризуются теми или иными величинами, меняющимися с течением времени, поэтому в очень многих ситуациях независимой переменной является время.

Пример 2. Камень брошен вниз с высоты 88 м со скоростью 2 м/с. Пока камень не упал, его высота h (в метрах) может быть найдена по формуле:

$$h(t) = 88 - 2t - 5t^2,$$

где t — время в секундах, прошедшее с момента броска, причём $0 \leqslant t \leqslant 4$.

Здесь уже сама запись формулы указывает, что t — независимая переменная, а h — зависимая переменная. Множество, на котором изменяется независимая переменная t, задано условием $0 \leqslant t \leqslant 4$. Формула задаёт правило, по которому можно найти значение зависимой переменной h для каждого значения независимой переменной t из этого множества. Скажем, $h(0) = 88$, $h(1) = 81$, $h(3) = 37$, $h(4) = 0$. Видно, что через 4 с после момента броска камень упадёт на землю.

Не всегда зависимость одной переменной от другой задаётся с помощью формулы.

Пример 3. На контрольной работе по математике было предложено 7 заданий. Отметка за контрольную k зависит от количества правильно выполненных заданий n следующим образом.

n	k
0	2
1	2
2	2
3	2
4	3
5	4
6	5
7	5

Здесь количество правильно выполненных заданий n — независимая переменная, а отметка за контрольную работу k — зависимая переменная. Независимая переменная может принимать значения из множества $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. В отличие от двух предыдущих примеров правило (или закон), позволяющее для каждого значения независимой переменной из этого множества находить соответствующее значение зависимой переменной, задано не с помощью формулы, а с помощью таблицы. Пользуясь этой таблицей, можно установить, что, скажем, $k(3) = 2$, $k(4) = 3$, $k(6) = 5$ и т. д.

Общим во всех рассмотренных примерах было следующее. Имеется независимая переменная, причём известно множество, на котором она изменяется. Имеется также правило (или, по-другому, закон), с помощью которого для каждого значения независимой переменной из этого множества можно найти соответствующее (обязательно единственное) значение зависимой переменной.

В математике в такой ситуации принято говорить, что зависимая переменная является *функцией* независимой переменной. Функцией также называют правило, с помощью которого для каждого значения независимой переменной находится соответствующее значение зависимой переменной. Независимая переменная называется при этом *аргументом*, а множество, на котором изменяется независимая переменная, называется *областью определения функции.*

Обратите внимание, задать функцию — значит задать две вещи:

1) область определения функции;

2) правило, по которому каждому значению аргумента из области определения функции ставится в соответствие одно-единственное значение функции.

При этом правило, о котором идёт речь (правило задания функции), может быть самым разным: функцию можно задавать с помощью формулы, таблицы, графика, описания и т. д. Постепенно вы познакомитесь с разными способами задания функции.

В общем виде правило задания функции обозначают буквой, чаще всего латинской. Скажем, если переменная y является функцией переменной (аргумента) x, то это можно записать, например, в виде: $y=f(x)$ и прочитать: «Игрек равно эф от икс». Здесь латинской буквой f как раз и обозначено правило задания функции. Из подобной записи также видно, какая переменная является независимой (аргументом), — она записана в скобках, а какая переменная является зависимой (функцией). Скажем, запись $u=g(t)$ показывает, что переменная u является функцией аргумента t, причём закон задания этой функции обозначен буквой g. Часто закон задания функции обозначают той же буквой, что и саму зависимую переменную (функцию). Так, вместо $y=f(x)$ пишут $y=y(x)$ или просто $y(x)$, вместо $u=g(t)$ пишут $u=u(t)$ или просто $u(t)$ и т. д.

Значение функции $y=f(x)$ при значении аргумента, равном, например, 5, обозначается $f(5)$. Для краткости говорят: «Значение функции в точке 5» или «Эф от пяти».

Один из самых распространённых способов задания функции — формула. В математике принято правило: если функция задана с помощью формулы и при этом область определения функции не указана, то предполагается, что *область определения состоит из всех допустимых значений аргумента* в этой формуле. Это множество обычно называется *естественной областью определения* функции, заданной с помощью формулы.

Например, для функции, заданной формулой $y=2x^2-x-3$, естественной областью определения является множество всех действительных чисел. Естественная область определения функции, заданной формулой $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$, состоит из всех действительных чисел, кроме $x=3$. Её можно записать в виде: $x\neq 3$.

Для функций, заданных с помощью формулы, легко по известному значению аргумента найти соответствующее значение функции — для этого нужно подставить значение аргумента в формулу и выполнить необходимые вычисления. Скажем, чтобы найти значение функции $y=-5x+8$ при значении аргумента, равном 3, подставим в формулу, задающую функцию, вместо x его значение 3. Получим: $y=-5\cdot 3+8$ или $y=-7$. Это можно также записать в виде $y(3)=-7$.

Иногда приходится решать обратную задачу: по известному значению функции найти соответствующее значение аргумента. Скажем, выясним, при каком значении аргумента значение функции $y=-5x+8$ равно 33. Для этого подставим в формулу, задающую функцию, вместо y его значение 33. Получим: $33=-5x+8$. Как видим, задача свелась к решению уравнения, и дальнейшее зависит от того, сумеем ли мы решить это уравнение или нет. В рассматриваемом примере полученное уравнение является линейным. Решая его, получим:

$$5x=8-33;\ 5x=-25;\ x=-5.$$

Таким образом, значение 33 функция $y=-5x+8$ принимает при значении аргумента, равном 5.

Рассмотрим ещё две задачи подобного вида.

Сначала выясним, при каком значении аргумента значение функции $y=x^2+5$ равно 9.

Подставляя в формулу, задающую функцию, вместо y его значение 9, получим уравнение: $9=x^2+5$, или $0=x^2+5-9$, или $0=x^2-4$. Подобные уравнения мы уже решали на уроках алгебры в 7-м классе. Перепишем его в более удобном виде $x^2-4=0$, после чего разложим левую часть на множители, воспользовавшись формулой разности квадратов: $(x-2)(x+2)=0$.

Отсюда заключаем, что или $x-2=0$, т. е. $x=2$, или $x+2=0$, т. е. $x=-2$.

Таким образом, значение 9 функция $y=x^2+5$ принимает при значении аргумента, равном 2, и при значении аргумента, равном −2.

Теперь выясним, при каком значении аргумента значение функции $y=x^3-5x$ равно 1.

Подставляя в формулу, задающую функцию, вместо y его значение 1, получим уравнение: $1=x^3-5x$. Решить это уравнение мы не можем. Тем самым мы не можем определить для рассматриваемой функции, при каком значении аргумента она принимает значение 1.

Развиваем умения

Н

1 Расскажите, приводя примеры:

а) что такое независимая переменная;

б) что такое зависимая переменная;

в) как называется правило, ставящее в соответствие каждому значению независимой единственное значение зависимой переменной.

2 Закончите предложение.

а) Областью определения функции называется … .

б) Естественной областью определения функции, заданной с помощью формулы, называется … .

3 Укажите независимую и зависимую переменные:

а) $y=-x-x^2$; б) $z=h-\frac{1}{2}h^2$; в) $x=p^3-1$; г) $u=\frac{b}{b-1}+b$.

4 Укажите аргумент и функцию:

а) $y=18-4x$; б) $f=t^5+t^3$; в) $g=s-\frac{s}{1-s}$; г) $w=\frac{a^2-1}{a^2+1}$.

5 Велосипедист ехал 4 часа со скоростью 12 км/ч. Запишите формулу, выражающую пройденный путь s через время t. Какая переменная является независимой и какая зависимой? Какова область определения полученной функции?

6 Труба наполняет водой бассейн со скоростью 5 т/мин. Бассейн имеет водоизмещение 1500 т. Запишите формулу, выражающую долю заполнения бассейна d через время t, если сначала он был пуст. Какая переменная является независимой и какая зависимой? Какова область определения полученной функции?

7 На металлургическом комбинате изготавливают латунь, сплав меди и цинка. Для этого в ёмкость с расплавленной медью, вес которой 500 кг, добавляют расплавленный цинк. Запишите формулу, выражающую долю c цинка в получаемом сплаве через массу m добавленного цинка, если постепенно его добавят 150 кг. Какая переменная является независимой и какая зависимой? Какова область определения полученной функции?

8 Функция задана формулой $y=\frac{x^2}{x+1}$. Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значения функции при указанных значениях аргумента.

x	0	1	2	3	4	5
y						

9 Функция задана формулой $y=2(x-3)$. Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значения функции при указанных значениях аргумента.

x	3	4	-1	3,4	$-2{,}05$	$-8{,}25$
y						

10 Найдите значение функций для указанных значений аргумента:

а) $y=3x-x^2$ для значения аргумента, равного 0; 1; 2; −1; −2; 0,4;

б) $s=3+4t$ для значения аргумента, равного 0; 1; 2; 3; $\frac{1}{3}$; $2\frac{2}{3}$;

в) $g=h^3+1$ для значения аргумента, равного -2; -1; 0; 1; 2; $\frac{3}{2}$;

г) $w=a+\frac{1}{a}$ для значения аргумента, равного $\frac{1}{5}$; 5; 8; $\frac{1}{8}$; -3; $-\frac{3}{4}$.

Н

11 Для функции, заданной формулой $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, найдите:

а) $y(0)$; в) $y(0{,}2)$; д) $y(0{,}5)$; ж) $y\left(-\dfrac{12}{5}\right)$;

б) $y(1)$; г) $y(-3)$; е) $y\left(\dfrac{12}{5}\right)$; з) $y(-0{,}5)$.

12 Дана функция $f(x)=3-\dfrac{4}{x}$. Найдите:

а) $f(2)$; в) $f(8)$; д) $f(-0{,}5)$; ж) $f\left(\dfrac{4}{9}\right)$;

б) $f(-1)$; г) $f(0{,}1)$; е) $f(0{,}2)$; з) $f\left(-\dfrac{16}{13}\right)$.

13 Для функции, заданной формулой $y=\dfrac{3x-4}{2}$, определите, при каком значении аргумента она принимает указанное значение:

а) 4; б) 10; в) 0,1; г) -2.

14 Для функции, заданной формулой $y=7-x^2$, определите, при каком значении аргумента она принимает указанное значение:

а) -2; б) 3; в) -9; г) 7.

15 Найдите естественную область определения функции, заданной формулой:

а) $y=x^3-6(x-8)$;

б) $y=\dfrac{3-x}{4-x}$;

в) $y=x+\dfrac{1}{x-1}$;

г) $y=x^5+x^6$;

д) $y=x(x-1)\dfrac{x-2}{x-3}$;

е) $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$;

ж) $y=\dfrac{x^2+x}{4x^2-1}$;

з) $y=\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x-1}\cdot\dfrac{x+1}{x+1}$.

16 Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{x+2}{x-1}$;

б) $y=\dfrac{1}{x^6+x^2}$;

в) $y=\dfrac{x}{2x-3}\cdot\dfrac{x^2}{2x+4}$;

г) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}+\dfrac{x^4}{x^4+1}+\dfrac{x^6}{x^6+1}$;

д) $y=\dfrac{2x}{x^2+4}$;

е) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1}$;

ж) $y=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$;

з) $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x}}$.

П

17 На окружности взято n точек и каждые две точки соединены отрезком. Запишите формулой зависимость количества отрезков m от количества точек. Какая переменная является независимой и какая зависимой? Какова область определения полученной функции?

18 Для функции $y=f(x)$ запишите с помощью математических символов следующие утверждения:

а) значение функции при значении аргумента 2 равно 3;

б) значение функции при значении аргумента 6 равно значению функции при значении аргумента 7;

в) значения функции в точках 2 и -1 одинаковы;

г) сумма значений функции в точках 9 и -9 равна 1.

19 Пусть $f(x)=3x-2$; $h(x)=x^2$. Найдите:

а) $f(1)+h(-1)$; б) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)-h(2)$; в) $f(0{,}1):h(0{,}1)$; г) $f(4)\cdot h(5)$.

М

20 Пусть $f(x)=3-2x$. Найдите:

а) $f(a)$; б) $f(m-1)$; в) $f(4c)$; г) $f(x+3)$.

21 Пусть $f(x)=3x-2$; $h(x)=x^2$. Найдите:

а) $f(2x)+h(2x)$;

б) $f(h(2))$;

в) $4f(h(f(x)))+9h(f(h(x)))$;

г) $f(h(x))$;

д) $f\left(\dfrac{1}{3h(x)}+\dfrac{2x}{f(x)}\right)$;

е) $h(f(x+k)-f(x+k-1))$;

ж) $f\left(h\left(h\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{4}{9}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\right)$;

з) $f\left(h(x)-\dfrac{1}{39}f\left(h(x)+4f\left(h(x)+\dfrac{13}{36}f(x)\right)\right)\right)$.

2.2 Графики функций

Вспоминаем то, что знаем

Рассмотрим функцию, заданную формулой

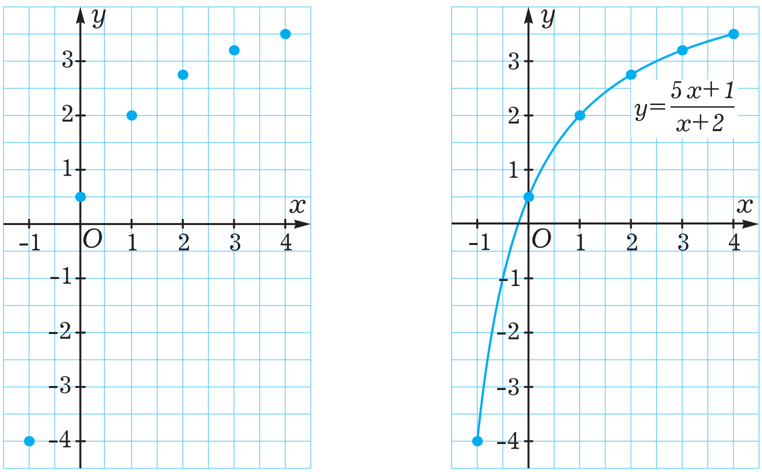
$$y=\frac{5x+1}{x+2}, \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 4.$$

Найдём значения этой функции при всех целых значениях аргумента из области определения функции и занесём полученные результаты в таблицу.

x	-1	0	1	2	3	4
y	-4	0,5	2	2,75	3,2	3,5

Из таблицы видно, что, например, при значении аргумента -1 соответствующее значение функции равно -4. Другими словами, при $x=-1$ $y=-4$. Этой паре значений x и y соответствует точка координатной плоскости $(-1; -4)$ с абсциссой $x=-1$ и ординатой $y=-4$. То же самое можно сказать об остальных парах чисел, расположенных в столбцах рассматриваемой таблицы.

Нанесём все эти точки на координатную плоскость (рис. 1 а). Понятно, что если брать всё новые и новые значения аргумента, вычислять соответствующие им значения функции и наносить полученные точки на координатную плоскость, то будем получать всё больше и больше таких точек.



а) б)

Рис. 1

Множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции, называется *графиком* этой функции.

График функции $y = \dfrac{5x+1}{x+2}$, где $-1 \leqslant x \leqslant 4$, изображён на рис. 1 б.

Построим ещё один график. Возьмём функцию, заданную формулой $y = x^2 - 4x + 5$ при $0 \leqslant x \leqslant 5$.

Начнём, как и в предыдущем примере, с нахождения значений функции при целых значениях аргумента из области определения функции и заполнении таблицы.

x	0	1	2	3	4	5
y	5	2	1	2	5	10

Нанесём полученные точки на координатную плоскость (рис. 2 а). По имеющимся данным уже можно пробовать рисовать график, соединяя точки плавной линией. Для более точного построения графика можно увеличить количество точек, найдя значения функции при других значениях аргумента. Ясно, что чем больше точек будет нанесено на координатную плоскость, тем точнее мы сможем нарисовать график. Получим ещё несколько точек нашего графика, заполнив ещё одну таблицу.

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	3,25	2,5	1,25	3,25	7,25

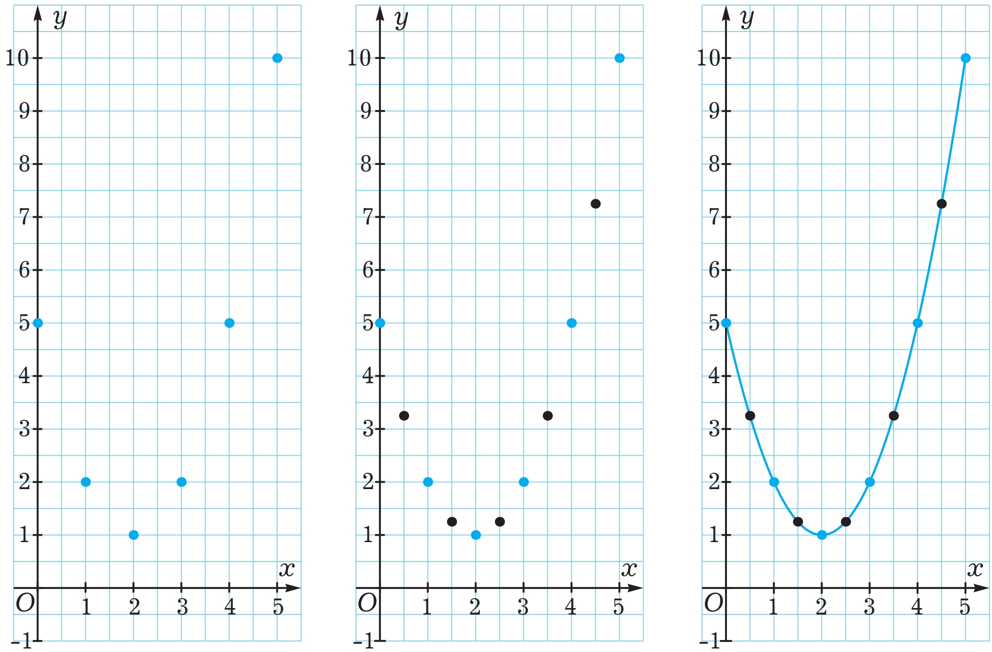
Добавим полученные точки к уже нанесённым на координатную плоскость (чёрные точки на рис. 2 б).

Теперь нарисуем график (рис. 2 в).

Рассматривание графика и его анализ (или, как чаще говорят, *чтение графика*) позволяет многое узнать о функции и о её поведении. Скажем, для построенного графика функции $y = x^2 - 4x + 5$ при $0 \leqslant x \leqslant 5$ видно, что наибольшее значение функции равно 10. Это своё наибольшее значение функция принимает (ещё принято говорить «достигает») при значении аргумента, равном 5. Такой вывод нам позволило сделать наблюдение, что наибольшему значению функции соответствует наивысшая точка графика. Точно так же, найдя самую нижнюю точку графика, мы сможем сделать вывод, что наименьшее значение рассматриваемой функции равно 1 и достигается при $x = 2$.

Из графика видно, что при изменении аргумента от 0 до 2 функция *убывает* (значения функции уменьшаются), а при изменении аргумента от 2 до 5 функция *возрастает* (значения функции увеличиваются).

С помощью графика можно находить значение функции, соответствующее данному значению аргумента, правда, в большинстве случаев это удастся сделать только приближённо. Скажем, чтобы найти значение функции при значении аргумента, равном 3, возьмём точку 3 на оси абсцисс (где изменяется аргумент) и проведём через неё прямую, перпендикулярную оси абсцисс, до пересечения



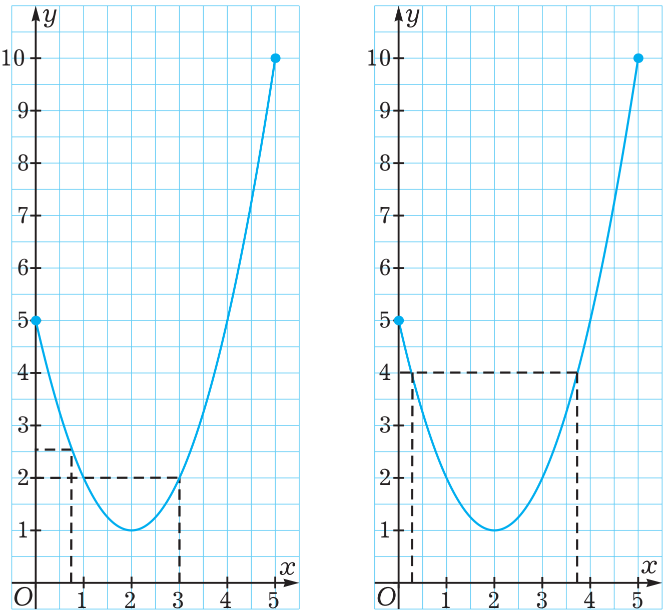
а) б) в)

Рис. 2

с графиком. Через полученную точку на графике проведём прямую, перпендикулярную оси ординат (рис. 3 а). Точка пересечения этой прямой с осью ординат и даст искомое значение функции. Из рисунка видно, что это $y = 2$. Если мы захотим найти значение функции в точке $x = 0{,}75$ и выполним такие же действия, то с помощью графика установим соответственное значение функции лишь приближённо: $y(0{,}75) \approx 2{,}6$ (рис. 3 б).

Аналогично можно находить с помощью графика значение аргумента, при котором функция принимает данное значение. Скажем, чтобы найти, при каком значении аргумента функция принимает значение, равное 4, возьмём точку 4 на оси ординат (именно на этой оси откладываются значения функции) и проведём через неё прямую, перпендикулярную оси ординат, до пересечения с графиком. Таких точек пересечения оказалось две (рис. 3 б). Через каждую из полученных точек на графике проведём прямую, перпендикулярную оси абсцисс. Точки пересечения этих прямых с осью абсцисс и дадут искомые значения аргумента. Из рисунка видно, что это $x \approx 0{,}3$ и $x \approx 3{,}7$.

Мы рассмотрели, как строить график функции, заданной с помощью формулы. Но очень часто функция *задаётся* с помощью графика. Предположим, нас интересует температура воздуха в данном населённом пункте (обычно её измеряют в определённой точке на метеорологической станции) в течение суток, от



а) б)

Рис. 3

0 ч до 24 ч по местному времени. Понятно, что в этих условиях в каждый момент времени температура воздуха принимает вполне определённое единственное значение. Таким образом, температура является функцией времени. Вряд ли мы сможем задать эту функцию с помощью какой-либо формулы, а вот графики подобных функций специалисты-метеорологи получают с помощью специальных приборов-самописцев. Бумага, на которой рисуется график, намотана на медленно вращающийся с помощью часового механизма барабан, а самопишущее перо соединено со специальным термометром.

На рис. 4 приведён один из графиков зависимости температуры от времени в течение суток. По оси абсцисс откладывается время в часах, а по оси ординат — температура в градусах Цельсия.

С помощью этого графика мы можем получить очень много информации о температуре за исследуемые сутки. Видно, что в момент начала наблюдений (0 ч) температура воздуха была -2 °C, затем она постепенно понижалась и, достигнув примерно в 3 ч своего наименьшего значения, равного -6 °C, стала возрастать, сначала побыстрее, затем помедленнее и достигла отметки 0 °C в 11 ч, причём за последние три часа перед этим, с 8 ч до 11 ч, она повысилась всего на 1 градус (от -1 °C до 0 °C). Далее температура увеличивалась и, достигнув своего наибольшего значения, примерно равного $+4{,}5$ °C между 14 ч и 15 ч, при-

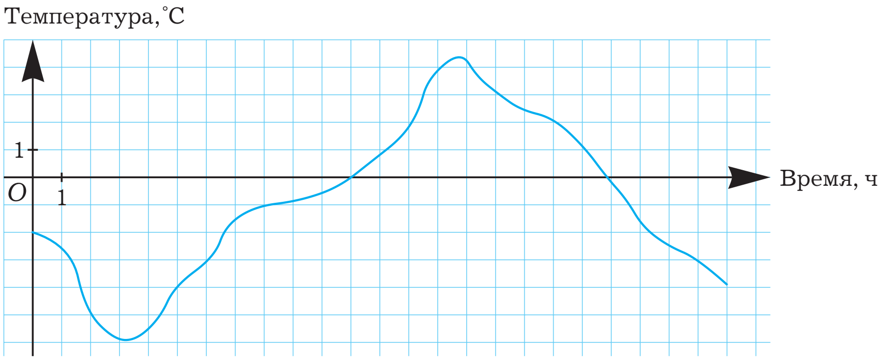


Рис. 4

мерно в 14 ч 40 мин, стала уменьшаться и уменьшалась до конца суток (24 ч), когда достигла значения −4 °С. При этом равной 0 °С температура была в 20 ч.

Из графика можно извлечь много другой информации. Скажем, видно, что положительной за рассматриваемые сутки температура была в течение 9 часов (с 11 ч до 19 ч), остальные 15 часов температура была отрицательной.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.

а) Графиком функции называется … .

б) Чтобы найти с помощью графика значение функции, соответствующее данному значению аргумента, нужно … .

в) Чтобы найти с помощью графика значение аргумента, при котором функция принимает данное значение, нужно … .

2 Расскажите, приводя примеры, как строить график функции, заданной с помощью формулы.

3 Принадлежит ли графику функции $y=\dfrac{x}{x-3}$ точка $M(x;y)$, если:

а) $x=4;\ y=1$;

б) $x=2;\ y=-1$;

в) $x=-\dfrac{1}{4};\ y=\dfrac{1}{13}$;

г) $x=-0{,}5;\ y=0{,}2$?

4 Принадлежит ли графику функции $y=(x+2)(x-3)$ точка:

а) $(2;-3)$; б) $(5;14)$; в) $\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{3}\right)$; г) $(-3{,}5;9{,}75)$?

Н

5 С помощью графика, изображённого на рис. 5, определите:

а) значение y, если значение x равно -2; 2; 3;

б) значение x, если значение y равно 4; 0; -3;

в) $y(-1)$; $y(5)$; $y(5{,}5)$;

г) значение x, при котором $y(x)=2$; $y(x)=3$; $y(x)=-3$.

6 С помощью графика, изображённого на рис. 6, определите:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента -5; 0; 2;

б) значение аргумента, при котором функция принимает значение, равное 9; -2; 5;

в) наибольшее значение функции;

г) значение аргумента, при котором функция принимает своё наибольшее значение;

д) наименьшее значение функции;

е) значение аргумента, при котором функция принимает своё наименьшее значение.

7 На рис. 7 изображён график некоторой функции.

а) Запишите все значения аргумента, при которых функция равна нулю.

б) Запишите три значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

в) Запишите три значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

г) При каких значениях аргумента функция возрастает?

д) При каких значениях аргумента функция убывает?

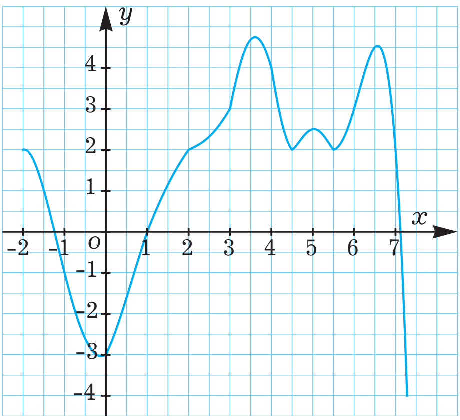


Рис. 5

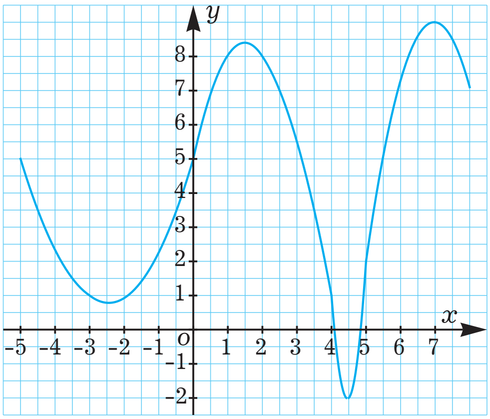


Рис. 6

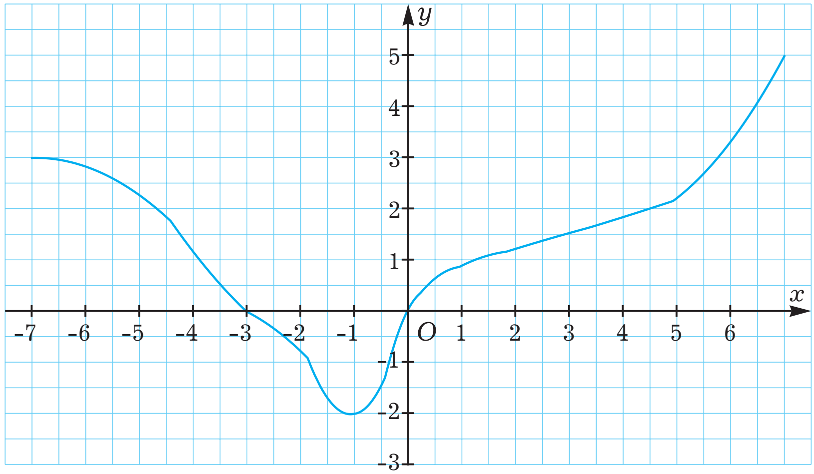


Рис. 7

8 Расстояние между пунктами A и B 220 км. По графику движения автомобиля (рис. 8) ответьте на вопросы:

а) Через сколько часов после выезда из пункта A автомобиль прибыл в пункт B?

б) Сколько часов длилась стоянка автомобиля?

в) На каком расстоянии от пункта A автомобиль сделал стоянку?

г) С какой скоростью автомобиль ехал до стоянки и с какой — после стоянки?

д) Какова средняя скорость автомобиля на маршруте от пункта A до пункта B?

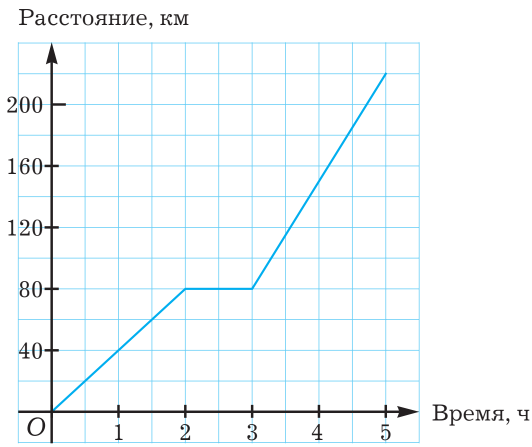


Рис. 8

П

9 Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль, а через некоторое время вслед за ним — легковой. По графику движения автомобилей (рис. 9) ответьте на вопросы:

а) Чему равно расстояние от пункта A до пункта B?

б) На сколько часов позже грузового легковой автомобиль выехал из пункта A?

в) Через сколько часов после выезда из пункта A каждый из автомобилей прибыл в пункт B?

г) С какой скоростью ехал каждый из автомобилей?

д) Через сколько часов после своего выезда из пункта A легковой автомобиль догнал грузовой?

е) На каком расстоянии от пункта A легковой автомобиль догнал грузовой?

ж) На сколько часов раньше грузового легковой автомобиль прибыл в пункт B?

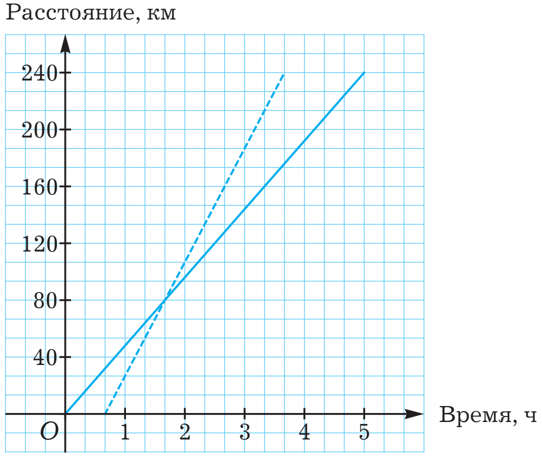


Рис. 9

10 Болид «Формулы-1» проезжает 3 круга длиной 6 км каждый. На рис. 10 приведён график зависимости расстояния болида от точки старта (измеренного вдоль трассы) от времени.

а) Какое расстояние проехал болид за 2,25 мин; за 2,5 мин; за 3 мин?

б) Сколько времени было потрачено на пит-стоп (техническую остановку) на втором круге?

в) С какой наибольшей скоростью двигался болид?

г) С какой средней скоростью болид проехал эти три круга?

д) На сколько секунд быстрее болид проехал второй круг, чем первый?

е) Сколько времени потребовалось на преодоление первой половины первого круга? второй половины второго круга?

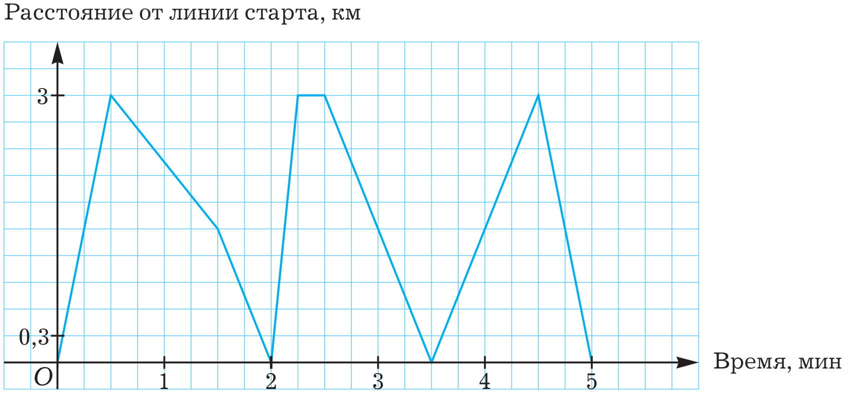


Рис. 10

ж) За какое время проехал бы болид все три круга, если бы он всё время ехал со скоростью, равной скорости на второй половине третьего круга?

11 В больнице взяли воду при температуре 0 °C, нагрели до кипения и стерилизовали в ней медицинские инструменты в течение необходимого времени, после чего оставили остывать до комнатной температуры 20 °C. График зависимости температуры воды от времени изображён на рис. 11.

а) Сколько времени вода нагревалась до кипения?
б) Сколько времени проводилась стерилизация инструментов?
в) Сколько времени вода остывала до комнатной температуры?
г) На сколько скорость нагревания воды была больше скорости охлаждения?
д) Сколько времени вода остывала бы до температуры 0 °C?

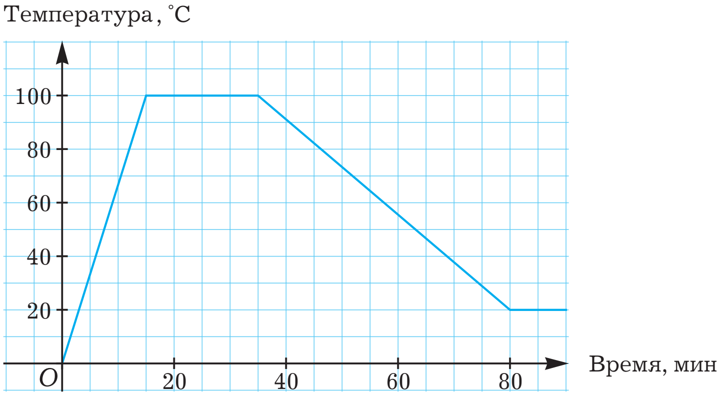


Рис. 11

е) Если бы вода не закипала при 100 °C, то за какое время она нагрелась бы до 200 °C?

ж) Сколько времени понадобилось на то, чтобы нагреть воду от 0 °C до комнатной температуры 20 °C?

з) За какое время вода нагрелась бы от 50 °C до кипения и остыла снова до 50 °C, если в момент начала кипения её сразу же прекратили нагревать и она начала бы остывать?

12 Всякая ли линия на координатной плоскости является графиком некоторой функции?

13 Какие из изображённых на рис. 12 линий являются графиками функций?

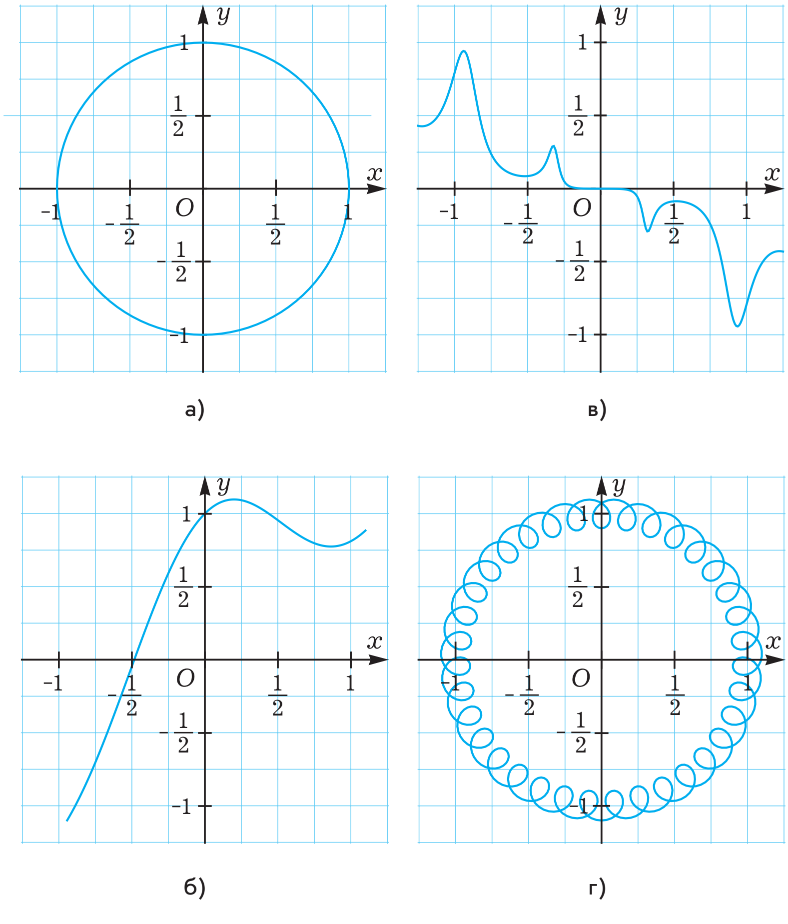


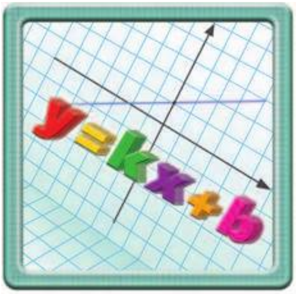
Рис. 12

Рис. 12

М

14 При каком условии линия на координатной плоскости является графиком некоторой функции?

2.3 Линейная функция и её график



Вспоминаем то, что знаем

- Что такое линейное уравнение с двумя неизвестными?
- Что представляет собой график линейного уравнения с двумя неизвестными?

Открываем новые знания

- Какова область определения функции $y = 2x - 3$?
- Верно ли, что равенство, задающее функцию $y = 2x - 3$, представляет собой линейное уравнение с двумя неизвестными?
- Нарисуйте график линейного уравнения с двумя неизвестными $y = 2x - 3$. Можно ли утверждать, что это график функции $y = 2x - 3$?
- Какое значение принимает функция $y = 2x - 3$ при $x = 0$? В какой точке график функции $y = 2x - 3$ пересекает ось ординат? Какая имеется связь между этими двумя вопросами?
- Как изменится значение функции $y = 2x - 3$, если значение аргумента увеличить на единицу? Зависит ли ответ на этот вопрос от того, какое именно значение аргумента увеличивали на единицу?

?! Что представляет собой график функции $y = kx + b$, где k и b — произвольные действительные числа?
Какими свойствами он обладает?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Линейной функцией называется функция, задаваемая формулой $y = kx + b$, где x — аргумент, y — функция, k и b — произвольные действительные числа, называемые *коэффициентами* линейной функции, причём каждый коэффициент имеет своё особое название: k — *угловой коэффициент*, b — *свободный член*. Естественной областью определения линейной функции является множество всех действительных чисел.

Поскольку формула, задающая линейную функцию, представляет собой линейное уравнение с двумя неизвестными (для полной ясности можно переписать

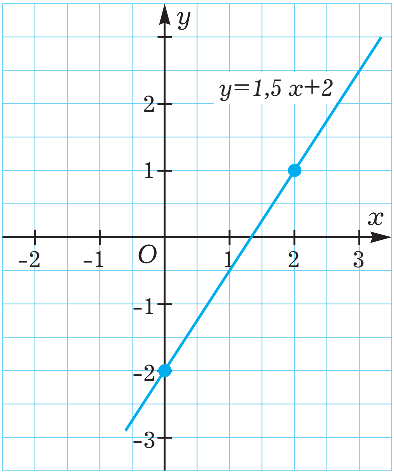


Рис. 13

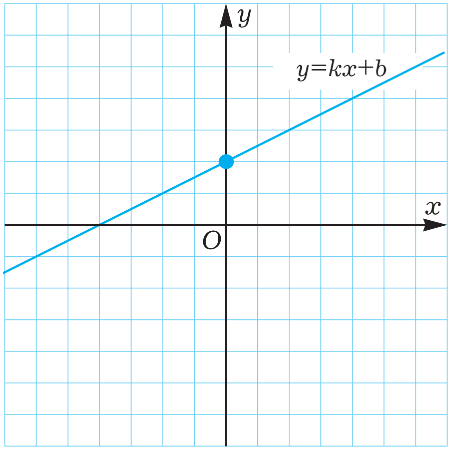


Рис. 14

его в виде $-kx + y = b$), то, как вы уже знаете из курса алгебры 7-го класса, графиком такого уравнения (а следовательно, и графиком линейной функции) является прямая. Для построения прямой достаточно двух точек, поэтому для построения графика линейной функции можно взять любые два значения аргумента, найти соответствующие значения функции, нанести полученные две точки на координатную плоскость и провести через эти точки прямую.

Построим, например, график функции $y = 1{,}5x - 2$. При $x = 0$ находим $y = -2$, при $x = 2$ находим $y = 1$. Таким образом, графиком рассматриваемой функции является прямая, проходящая через точки $(0; -2)$ и $(2; 1)$. График функции $y = 1{,}5x - 2$ изображён на рис. 13.

На графике, естественно, изображена не вся прямая, а лишь её часть. Если понадобится поработать с графиком функции $y = 1{,}5x - 2$, скажем при $x = 34$, то придётся нарисовать другой рисунок.

Выясним *геометрический смысл* коэффициентов линейной функции.

Начнём со свободного члена. Если подставить в уравнение $y = kx + b$ значение $x = 0$, то получим $y = b$. Таким образом, точка $(0;\ b)$ лежит на графике функции $y = kx + b$, или, по-другому, график проходит через эту точку. Можно сказать так: b — это ордината точки пересечения прямой — графика линейной функции $y = kx + b$ с осью Oy (рис. 14).

Для выяснения геометрического смысла углового коэффициента k поступим следующим образом: возьмём любое значение аргумента, скажем $x = m$, найдём соответствующее значение функции: $y = km + b$, а затем выясним, на сколько изменится значение функции, если значение аргумента увеличить на единицу. Новое значение аргумента будет $x = m + 1$, новое значение функции будет: $y = k(m + 1) + b$, а разность между новым и старым значениями функции будет равна:

$$k(m + 1) + b - (km + b) = km + k + b - km - b = k.$$

Из приведённых вычислений видно, что эта разность не зависит от выбора начального значения аргумента $x=m$. Таким образом, угловой коэффициент k показывает, на сколько изменяется значение линейной функции при увеличении аргумента на единицу. При этом значение функции *увеличивается* на k единиц, если $k>0$ (рис. 15 а), *уменьшается* на $|k|$ единиц, если $k<0$ (рис. 15 б), и остаётся неизменным, если $k=0$.

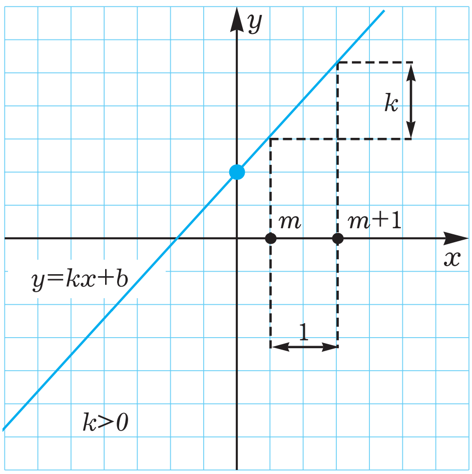
Из этого следует:

> Линейная функция $y=kx+b$ *возрастает*, если $k>0$, *убывает*, если $k<0$, и остаётся постоянной, если $k=0$.

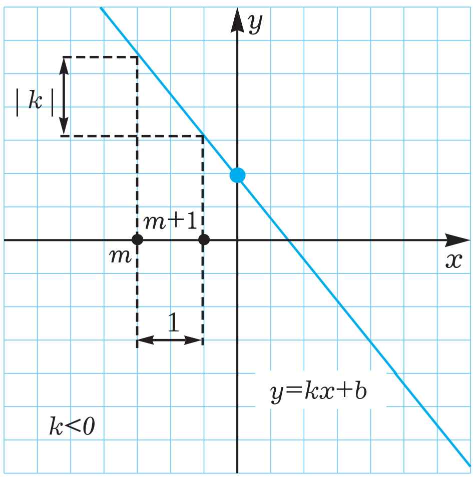
Последнее можно сформулировать ещё и так: прямая, являющаяся графиком линейной функции $y=kx+b$, параллельна оси абсцисс при $k=0$ и $b\neq 0$ и совпадает с осью абсцисс при $k=0$ и $b=0$.

Если две линейные функции имеют положительные угловые коэффициенты, то можно не только сказать, что обе эти линейные функции возрастают, но также, что линейная функция с бо́льшим угловым коэффициентом возрастает *быстрее*, а прямая, являющаяся её графиком, идёт *круче*.

Чтение графиков линейных функций, изображённых на рис. 16, позволяет заключить, что $k_1>0$, $k_2>0$, причём $k_1>k_2$. Кстати, из этого рисунка видно также, что $b_1>0$, $b_2>0$, причём $b_1<b_2$. Аналогичные выводы можно делать и для отрицательных угловых коэффициентов.



а)



б)

Рис. 15

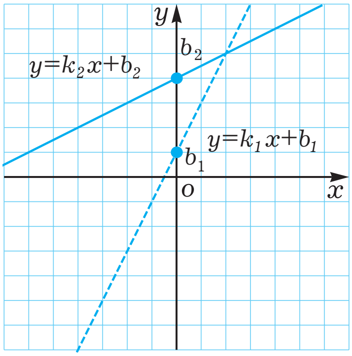


Рис. 16

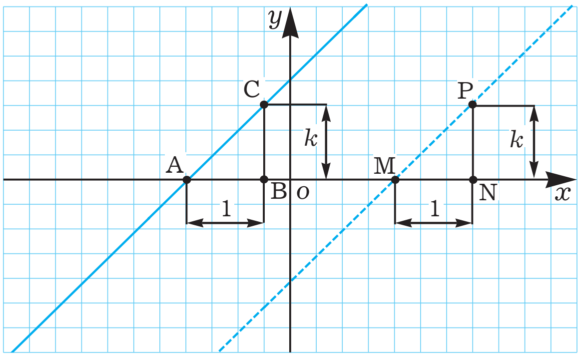


Рис. 17

Если же угловые коэффициенты у двух разных прямых равны, то такие прямые параллельны. (Поскольку графиком линейной функции является прямая, то часто говорят «угловой коэффициент прямой», имея в виду угловой коэффициент линейной функции, графиком которой является эта прямая.) Для доказательства этого факта отложим на оси абсцисс вправо от точек пересечения каждой из прямых с этой осью по единичному отрезку и через полученные точки проведём прямые, перпендикулярные оси абсцисс до пересечения с соответственными графиками, как изображено на рис. 17.

У нас образовались прямоугольные треугольники ABC и MNP. Геометрический смысл углового коэффициента позволяет утверждать, что $BC = NP = k$, а поскольку также $AB = MN = 1$, то прямоугольные треугольники ABC и MNP равны по двум катетам. Отсюда следует, что $\angle CAB = \angle PMN$, а поскольку эти углы являются соответственными для прямых AC и MP и секущей — оси абсцисс, то прямые параллельны.

Теперь мы можем сформулировать *условие параллельности прямых*.

Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$, но $b_1 \neq b_2$.

Можно также сформулировать *условие совпадения прямых*.

Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

Из курса геометрии 7-го класса вы знаете, что если две прямые не параллельны и не совпадают, то они пересекаются, причём в единственной точке. Вы также знаете, что для нахождения координат этой точки можно записать систему из уравнений этих прямых и решить её.

Рассмотрим, к примеру, линейные функции $y = -2x + 3$ и $y = 3x + 8$. Поскольку их угловые коэффициенты различны, то прямые не параллельны и не совпадают, а, значит, пересекаются. Для нахождения их точки пересечения решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = -2x + 3, \\ y = \ \ 3x + 8. \end{cases}$$

Это система линейных уравнений, причём решать её удобно, вычитая уравнения, например, из второго первое. Получим:

$$0 = 3x + 8 + 2x - 3;$$
$$0 = 5x + 5;$$
$$-5x = 5;$$
$$x = -1.$$

Подставляя $x = -1$, скажем, в первое уравнение, получим:

$$y = -2 \cdot (-1) + 3;\ y = 5.$$

Таким образом, прямые $y = -2x + 3$ и $y = 3x + 8$ пересекаются в точке $(-1; 5)$.

Довольно часто приходится рассматривать линейную функцию не на всей естественной области определения, а лишь на её части. Обычно в таких случаях область определения либо бывает задана, либо определяется из смысла ситуации. Например, если в резервуаре объёмом 300 м^3 содержится 100 м^3 жидкости и, начиная с некоторого момента, в него начинает с помощью насоса поступать жидкость со скоростью 10 м^3/мин до того момента, пока резервуар не наполнится, то объём жидкости V в бассейне (в м^3) зависит от времени t (в мин) по формуле $V = 100 + 10t$. Это линейная функция, но её аргумент t меняется в определённых пределах. Во-первых, t удовлетворяет условию $t \geqslant 0$, а во-вторых, решая уравнение $100 + 10t = 300$, мы можем найти, через какое время работы насоса произойдёт заполнение резервуара:

$$10t = 300 - 100;\ 10t = 200;\ t = 20.$$

Таким образом, $0 \leqslant t \leqslant 20$.

Графиком линейной функции в таких случаях является соответствующая часть прямой, чаще всего луч или отрезок.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.

а) Линейной функцией называется … .

б) Угловым коэффициентом в уравнении, задающем линейную функцию, называется … .

в) Свободным членом в уравнении, задающем линейную функцию, называется … .

г) Областью определения линейной функции является … .

д) Графиком линейной функции является … .

2 Расскажите, приводя примеры, какой геометрический смысл в уравнении, задающем линейную функцию, имеет:

а) свободный член; б) угловой коэффициент.

3 Закончите предложение.

а) Линейная функция $y = kx + b$ является возрастающей при ... .
б) Линейная функция $y = kx + b$ является убывающей при ... .

4 Сформулируйте условия, при которых две прямые, задаваемые уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

а) параллельны; б) совпадают; в) пересекаются.

5 При каких условиях график линейной функции $y = kx + b$ проходит через начало координат?

6 Укажите, какие из формул задают линейные функции:

а) $y = x^3$; в) $y = x + \dfrac{x}{x}$; д) $y = 0$; ж) $y = x$;

б) $y = 4x + 2$; г) $y = 2x - 4(x+1)$; е) $y = x^2 + x + 1$; з) $y = x^{-1}$.

7 Для линейных функций запишите угловой коэффициент и свободный член:

а) $y = -x + 4$; б) $y = 11x - 13$; в) $y = -3x$; г) $y = -6$.

Н

8 Постройте график линейной функции:

а) $y = 2x - 1$; в) $y = 3x - 3$; д) $y = 0{,}1x$; ж) $y = 6$;

б) $y = -0{,}5x + 2$; г) $y = -2x + 1$; е) $y = 3x$; з) $y = 0$.

9 Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{2}{3}x + 1$; в) $y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{5}{4}$; д) $y = -2 + x$; ж) $y = \dfrac{x+4}{4}$;

б) $y = -x - 1$; г) $y = 4x - 5$; е) $y = -1$; з) $y = (5x + 25) : 5$.

10 Выясните, параллельны, совпадают или пересекаются прямые. Для пересекающихся прямых определите координаты их точки пересечения:

а) $y = -4x + 3$ и $y = -4x + 8$; д) $y = 2x + 1$ и $y = (4x + 2) : 2$;

б) $y = \dfrac{5}{2}x + 4$ и $y = (x + 2) + \dfrac{3x + 4}{2}$; е) $y = 22x - 4$ и $y = 22x + 7$;

в) $y = x + 1$ и $y = 2x + 3$; ж) $y = 7$ и $y = 9$;

г) $y = 4x - 2$ и $y = -4x + 2$; з) $y = x$ и $y = -10x + 11$.

11 Для каждого из графиков линейных функций $y = kx + b$, изображённых на рис. 18, определите, положительным, отрицательным или равным нулю является угловой коэффициент k и свободный член b.

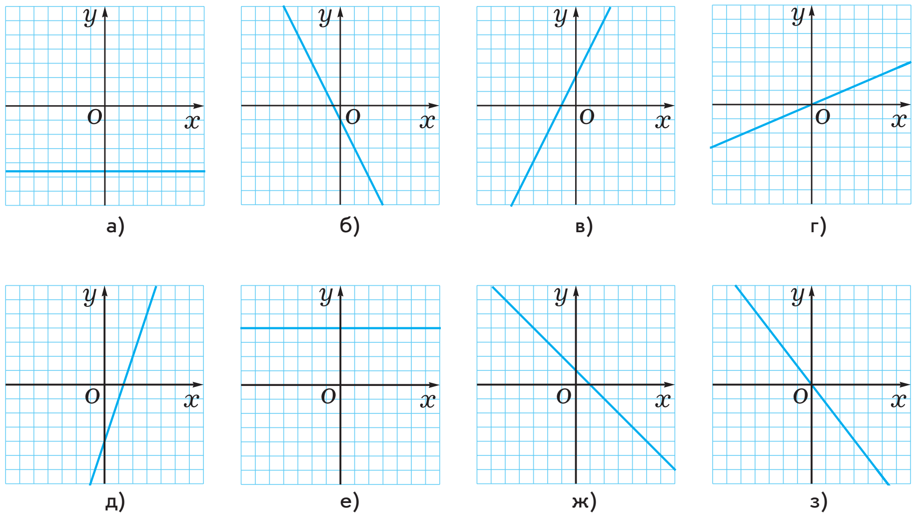


Рис. 18

П

12 Сравните угловые коэффициенты и сравните свободные члены линейных функций, графики которых изображены на рис. 19. Непрерывной линией обозначен график функции $y = k_1x + b_1$, пунктирной — $y = k_2x + b_2$.

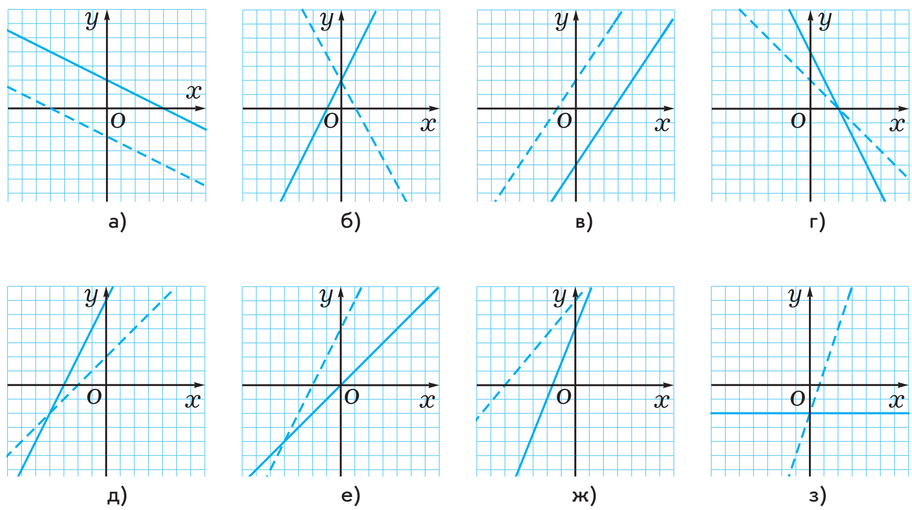


Рис. 19

13 Известно, что график линейной функции $y = kx + b$ не проходит через начало координат. Может ли он быть расположен полностью:
а) в одной четверти;
б) в двух четвертях;
в) в трёх четвертях;
г) в четырёх четвертях?
Если нет, объясните почему. Если да, выясните, при каких условиях.

14 Известно, что на рис. 20 изображён график одной из следующих линейных функций:

а) $y = \frac{1}{2}x + 7$; в) $y = \frac{1}{2}x - 8$;

б) $y = -\frac{1}{2}x + 7$; г) $y = -\frac{1}{2}x + 8$.

График какой именно из этих функций изображён на рисунке?

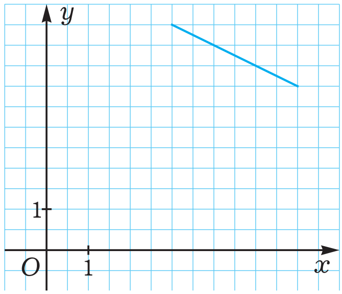


Рис. 20

15 Всякая ли прямая на координатной плоскости является графиком некоторой линейной функции?

М

16 Докажите, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ при $k_1k_2 = -1$ перпендикулярны.

17 Среди заданных прямых найдите пары взаимно перпендикулярных:
$y = 2x - 2$; $y = -5x - 5$; $y = 0{,}5x - 2$; $y = -2x + 5$; $y = 0{,}2x$; $y = -0{,}2x - 5$.

18 Чем похожи и чем отличаются график линейного уравнения с двумя неизвестными и график линейной функции?

М

19 Восьмиклассник Валя утверждает, что видел в одной книжке формулу для уравнения прямой, проходящей через две различные точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Эта формула, по его словам, была следующая:
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$
а) Выясните, справедлива ли формула, о которой говорит Валя.
б) Как записать уравнение прямой, если точки таковы, что $y_1 = y_2$?
в) Как записать уравнение прямой, если точки таковы, что $x_1 = x_2$?

2.4 Функция $y = x^2$ и её график

Вспоминаем то, что знаем

- Какие значения может принимать аргумент x функции $y = x^2$? Какие значения может принимать функция?
- Сравните значения функции $y = x^2$ при двух положительных значениях аргумента x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$.
- Сравните значения функции $y = x^2$ при двух отрицательных значениях аргумента x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$.

Открываем новые знания

- Какова область определения функции $y = x^2$?
- Сравните значения функции $y = x^2$ при противоположных значениях аргумента, например, -2 и 2; $-0{,}3$ и 0,3; $-x$ и x. Сформулируйте найденную закономерность. Докажите её.
- Найдите значения функции $y = x^2$ при нескольких значениях аргумента, нанесите соответственные точки на координатную плоскость и соедините их плавной линией.
- Какие особенности графика функции $y = x^2$ вы можете назвать?

?! Как выглядит график функции $y = x^2$?
Какими свойствами обладает график функции $y = x^2$?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

В математике очень важную роль играет функция, задаваемая формулой $y = x^2$. Вы неоднократно убедитесь в этом во время обучения как в 8-м классе, так и во всех последующих.

Изучим основные свойства этой функции и научимся строить её график.

Естественной областью определения этой функции является множество всех действительных чисел. Поскольку квадрат никакого действительного числа не может быть отрицательным, то $y(x) \geqslant 0$ при всех действительных x. При этом $y = 0$ лишь в том случае, когда $x = 0$.

Если взять два положительных числа и возвести каждое из них в квадрат, то ясно, что квадрат большего числа будет больше (позже вы научитесь строго доказывать это утверждение). Для рассматриваемой функции $y = x^2$ это значит, что для положительных значений аргумента эта функция является возрастающей.

Точно так же из двух отрицательных чисел квадрат большего числа будет меньше. Для функции $y = x^2$ это значит, что для отрицательных значений аргумента эта функция является убывающей.

Очень важным свойством функции $y = x^2$ является то, что при противоположных значениях аргумента значения функции одинаковы. Это следует из известной вам формулы $(-x)^2 = x^2$.

Функции, принимающие одинаковые значения при противоположных значениях аргумента, называются ***чётными функциями***. Таким образом, функция $y = x^2$ является чётной.

Тот факт, что функция $y = f(x)$ является чётной, записывается в виде:

$$f(-x) = f(x).$$

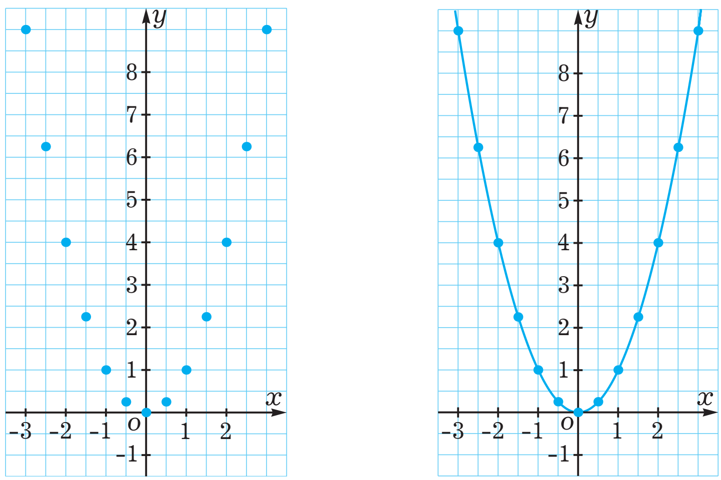
Поскольку две точки координатной плоскости с одинаковыми ординатами и противоположными абсциссами симметричны относительно оси ординат, то график чётной функции симметричен относительно оси ординат.

График функции $y = x^2$, таким образом, симметричен относительно оси ординат.

Для построения этого графика возьмём несколько положительных значений аргумента и найдём соответствующие значения функции.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Нанесём соответствующие точки на координатную плоскость, а также нанесём точки, симметричные уже нанесённым точкам относительно оси ординат (рис. 21 а). Соединив точки плавной линией, мы получим график функции $y = x^2$ (рис. 21 б).



а) б)

Рис. 21

Ясно, что поскольку область определения нашей функции состоит из всех действительных чисел (вся ось абсцисс), то весь график на листе бумаги нарисовать невозможно, и мы нарисовали лишь часть графика — точно так же, как мы рисуем на чертежах лишь часть бесконечной прямой.

Для более подробного построения графика функции $y = x^2$ полезно взять лист миллиметровой бумаги, а за единичный отрезок выбрать на каждой из осей 1 см.

Таблица значений функции будет гораздо объёмнее (мы не включили в неё данные предыдущей таблицы).

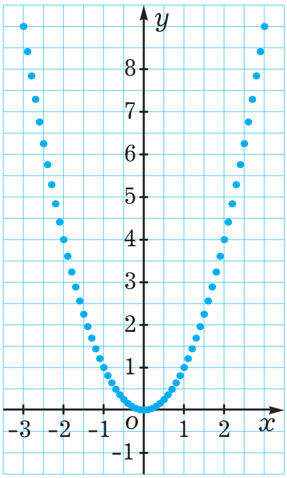
x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4
y	0,01	0,04	0,09	0,16	0,36	0,49	0,64	0,81	1,21	1,44	1,69	1,96

x	1,6	1,7	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9
y	2,56	2,89	3,24	3,61	4,41	4,84	5,29	5,76	6,76	7,29	7,84	8,41

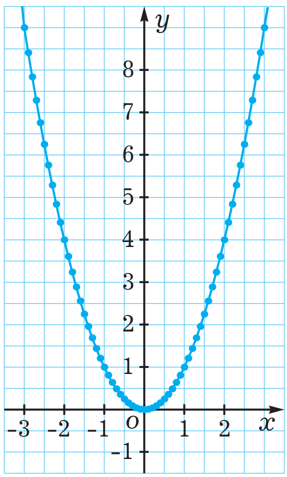
Теперь, после нанесения на координатную плоскость 31 точки, а также ещё 30 точек, симметричных уже нанесённым относительно оси ординат — кроме начала координат, которое симметрично самому себе (рис. 22 а), можно начертить более точный график функции $y = x^2$ (рис. 22 б).

Линия, являющаяся графиком функции $y = x^2$, называется *параболой*. Ось ординат является осью симметрии параболы. Точка пересечения параболы со своей осью симметрии называется *вершиной параболы*. У нас это начало координат, точка $(0; 0)$. Вершина параболы делит её на две части, называемые *ветвями параболы*.

Парабола обладает рядом замечательных свойств, которые мы рассмотрим несколько позже.



а)



б)

Рис. 22

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.
а) Областью определения функции $y=x^2$ является … .
б) Все значения функции $y=x^2$ являются … .
в) Графиком функции $y=x^2$ является … .

2 При каких значениях аргумента функция $y=x^2$ является:
а) возрастающей; б) убывающей?

3 а) Что такое ветви параболы?
б) Что такое вершина параболы?

4 а) Какая прямая является осью симметрии параболы $y=x^2$?
б) Какая точка является вершиной параболы $y=x^2$?
в) В каких четвертях расположена парабола $y=x^2$?

5 Расскажите, приводя примеры.
а) Какая функция называется чётной?
б) Какими особенностями обладает график чётной функции?

6 Найдите значения функции $y=x^2$ при указанных значениях аргумента:
а) 14; в) -15; д) 11; ж) 9;
б) -8; г) 15; е) 12; з) -17.

7 Найдите значения функции $y=x^2$ при указанных значениях аргумента:
а) $-1,4$; в) $0,1$; д) $-7,7$; ж) $6,79$;
б) $4,2$; г) $9,9$; е) $10,4$; з) $-3,41$.

Н

8 Найдите значения функции $y=x^2$ при указанных значениях аргумента:
а) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{9}$; д) $-\frac{5}{6}$; ж) $\frac{9}{8}$;
б) $-\frac{1}{4}$; г) $-\frac{4}{7}$; е) $\frac{10}{3}$; з) $-\frac{7}{2}$.

9 Выберите точки, принадлежащие графику функции $y=x^2$:
а) $(-2;\ 6)$; в) $(-12;\ 144)$; д) $(3;\ 8,9)$; ж) $(0;\ 0)$;
б) $(-7;\ 1)$; г) $(0,2;\ 0,04)$; е) $(-1;\ 1)$; з) $\left(\frac{2}{3};\ \frac{4}{9}\right)$.

10 Сравните, не вычисляя:

а) $3{,}2^2$ и $3{,}4^2$; в) $0{,}01^2$ и $0{,}02^2$; д) 11^2 и 12^2; ж) $9{,}3^2$ и $9{,}2^2$;
б) $1{,}1^2$ и $0{,}9^2$; г) 11^2 и $10{,}9^2$; е) $7{,}8^2$ и $7{,}9^2$; з) $2{,}2^2$ и $1{,}9^2$.

11 Дана функция $y = x^2$. Сравните $y(u)$ и $y(v)$, если:

а) $u = -2{,}7$; $v = -2{,}8$; в) $u = -0{,}1$; $v = -0{,}09$;
б) $u = -10{,}12$; $v = -10{,}1$; г) $u = -4{,}4$; $v = -4{,}9$.

П

12 Выясните, какие из функций являются чётными:

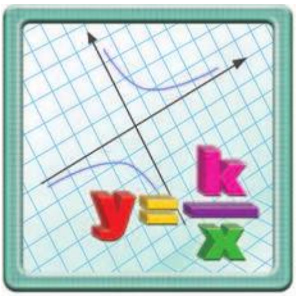
а) $y = 5 - x^2$; в) $y = (x+2)^2 - 4x$; д) $y = 3x$; ж) $y = x^3$;
б) $y = (x-1)^2$; г) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$; е) $y = -x + 1$; з) $y = x^4$.

13 Что можно сказать о функции, график которой симметричен относительно оси ординат?

М

14 Что можно сказать о функции, график которой симметричен относительно оси абсцисс?

2.5 Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график



Вспоминаем то, что знаем

- Какие величины называются обратно пропорциональными?
- Приведите несколько примеров обратно пропорциональных величин.
- Какой формулой связаны между собой обратно пропорциональные величины?

Открываем новые знания

- Какова область определения функции $y = \frac{k}{x}$, где k — произвольное действительное число?

- Сравните значения функции $y=\dfrac{k}{x}$ при противоположных значениях аргумента, например, −2 и 2; −0,3 и 0,3; $-x$ и x. Сформулируйте найденную закономерность. Докажите её.
- Найдите значения функции $y=\dfrac{12}{x}$ при нескольких значениях аргумента, нанесите соответственные точки на координатную плоскость и соедините их плавной линией.
- Найдите значения функции $y=\dfrac{-12}{x}$ при нескольких значениях аргумента, нанесите соответственные точки на координатную плоскость и соедините их плавной линией.
- Какие свойства графика функции $y=\dfrac{k}{x}$ вы можете назвать при положительных k? при отрицательных k?

?! Как выглядит график функции $y=\dfrac{k}{x}$?

Какими свойствами обладает график функции $y=\dfrac{k}{x}$?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Мы будем изучать функцию $y=\dfrac{k}{x}$, где k — произвольное действительное число, отличное от нуля.

Естественная область определения этой функции состоит из всех действительных чисел, кроме нуля. Она может быть записана в виде: $x \neq 0$.

На уроках математики в 6-м классе вы уже встречались с формулой $y=\dfrac{k}{x}$ при положительных k, x и y, когда изучали обратно пропорциональные величины. Напомним, что две (положительные) величины называются обратно пропорциональными, если с увеличением (уменьшением) одной из них в несколько раз вторая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Обратно пропорциональными величинами являются:

– количество товара и его цена при одинаковой стоимости покупки;

– скорость и время движения равномерно движущегося объекта при одинаковой длине пути;

– производительность труда и время работы при одинаковом объёме работы и многие другие величины.

В курсе математики 6-го класса было установлено, что если величины x и y обратно пропорциональны, то они связаны между собой формулой $xy=k$ или $y=\dfrac{k}{x}$, где k — некоторая постоянная величина.

Именно по этой причине зависимость, задаваемую формулой $y=\frac{k}{x}$, называют обратно пропорциональной зависимостью (употребляя это название уже не только для положительных k, x и y, но и для произвольных — только лишь отличных от нуля).

Начнём изучение этой зависимости с очень важного её свойства. Вы уже знаете из предыдущего параграфа, что функции, принимающие одинаковые значения при противоположных значениях аргумента, называются *чётными функциями*. Например, функция $y=x^2$ является чётной. Вы также знаете, что условие чётности функции $y=f(x)$ может быть записано в виде:

$$f(-x)=f(x).$$

Выясним, как связаны между собой значения изучаемой нами в этом параграфе функции $y(x)=\frac{k}{x}$ при противоположных значениях аргумента. Проведём необходимые преобразования:

$$y(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-y(x).$$

Таким образом, установлено, что значения функции $y=\frac{k}{x}$ при противоположных значениях аргумента являются противоположными числами. Функции, обладающие этим свойством, называются *нечётными функциями*. Можно сказать, что функция $y=\frac{k}{x}$ является нечётной.

Тот факт, что некоторая функция $y=f(x)$ является нечётной, записывается в виде:

$$f(-x)=-f(x).$$

Поскольку две точки координатной плоскости, у которых и абсциссы, и ординаты являются противоположными числами, симметричны относительно начала координат, то график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

График функции $y=\frac{k}{x}$, таким образом, симметричен относительно начала координат.

Построим график функции $y=\frac{k}{x}$, рассмотрев сначала случай, когда k — положительное число. Возьмём, например, $k=6$ и построим график функции $y=\frac{6}{x}$.

Начнём, как обычно, с нахождения значений функции при нескольких значениях аргумента из области определения функции и заполнения таблицы. Сначала будем брать положительные значения аргумента.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12
y	12	6	4	3	2,4	2	1,5	1,2	1	0,75	0,6	0,5

При соответственных отрицательных значениях аргумента мы можем заполнить таблицу, основываясь на нечётности рассматриваемой функции.

x	−0,5	−1	−1,5	−2	−2,5	−3	−4	−5	−6	−8	−10	−12
y	−12	−6	−4	−3	−2,4	−2	−1,5	−1,2	−1	−0,75	−0,6	−0,5

Нанесём полученные точки на координатную плоскость (рис. 23).

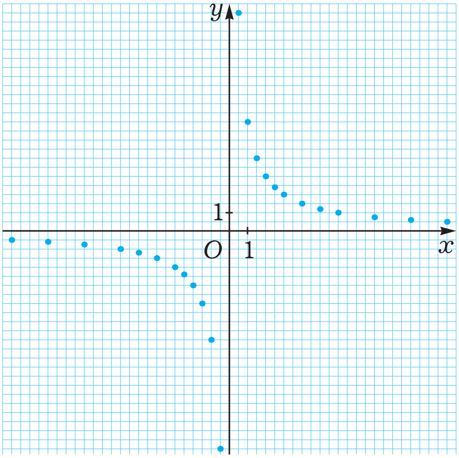


Рис. 23

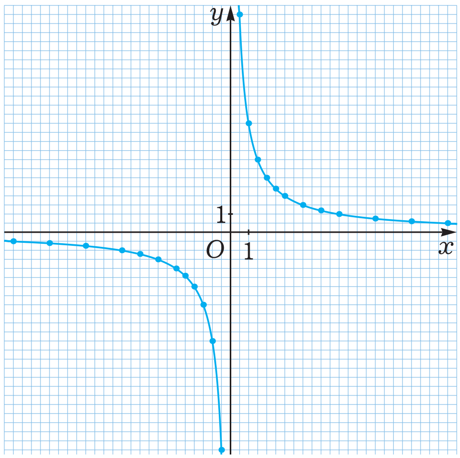


Рис. 24

Соединим плавной линией точки, лежащие в первой четверти. После этого соединим плавной линией точки, лежащие в третьей четверти. Ясно, что эти две линии симметричны друг другу относительно начала координат. Весь построенный график называется *гиперболой*, а две отдельные линии, из которых он состоит, называются *ветвями* гиперболы (рис. 24). Одна ветвь гиперболы $y=\dfrac{6}{x}$ лежит в первой четверти, а другая — в третьей четверти.

Из графика видно, что для двух положительных значений аргумента большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Можно сказать, что функция $y=\dfrac{6}{x}$ для положительных значений аргумента является убывающей.

Из графика видно также, что для двух отрицательных значений аргумента большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. функция $y=\dfrac{6}{x}$ для отрицательных значений аргумента тоже является убывающей.

Но в то же время функцию $y=\frac{6}{x}$ нельзя назвать убывающей на всей области определения, поскольку значение этой функции при любом положительном значении аргумента больше, чем её значение при любом отрицательном значении аргумента.

Аналогичный вид и аналогичные свойства имеет график функции $y=\frac{k}{x}$ при других положительных k. Построим такие графики в одной координатной плоскости при трёх различных значениях $k>0$, скажем, при $k=6$, $k=2$, $k=\frac{1}{2}$, т.е. графики $y=\frac{6}{x}$ (синего цвета), $y=\frac{2}{x}$ (серого цвета), $y=\frac{1}{2x}$ (чёрного цвета). Эти графики изображены на рис. 25.

Видно, что в I четверти чем больше $k>0$, тем выше лежит график, а в III четверти наоборот: чем больше $k>0$, тем ниже лежит график.

Построим теперь график функции $y=\frac{k}{x}$, когда k — отрицательное число. Возьмём, например, $k=-6$ и построим график функции $y=\frac{-6}{x}$, или, что то же самое, $y=-\frac{6}{x}$.

Сравнивая значения функции $y=-\frac{6}{x}$ со значениями функции $y=\frac{6}{x}$ при одних и тех же значениях аргумента, мы видим, что они являются противоположными числами. Это значит, что графики этих функций симметричны друг другу относительно оси абсцисс. Но график функции $y=\frac{6}{x}$ мы уже построили выше, а теперь с помощью осевой симметрии получим из него график функции $y=-\frac{6}{x}$. На рис. 26 график функции $y=\frac{6}{x}$ изображён синим цветом, а график функции $y=-\frac{6}{x}$ изображён чёрным цветом.

Обратите внимание, что графики функций $y=-\frac{6}{x}$ и $y=\frac{6}{x}$ симметричны друг другу также и относительно оси ординат. Это можно было заметить, анализируя формулы: видно, что если значения аргумента в них являются противоположными числами, то соответствующие им значения функций равны.

График функции $y=\frac{k}{x}$ при $k<0$, представляет собой гиперболу, ветви которой расположены во второй и четвёртой координатных четвертях.

При $k<0$ функция $y=\frac{k}{x}$ для положительных значений аргумента является возрастающей и для отрицательных значений аргумента тоже является возрастающей.

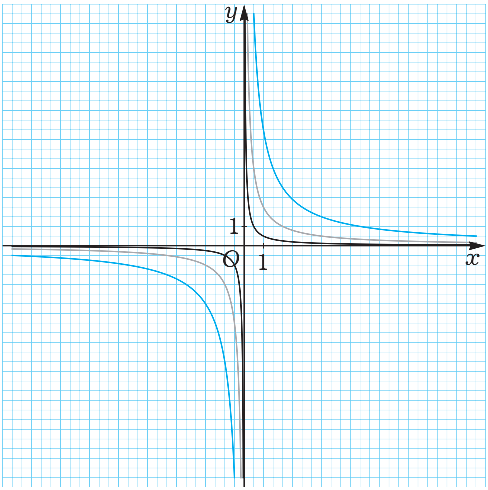


Рис. 25

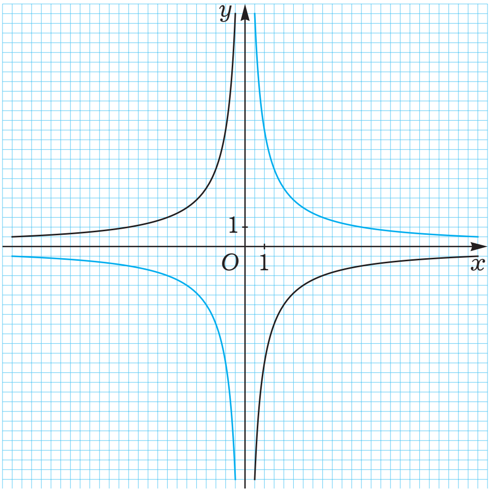


Рис. 26

В то же время эту функцию нельзя назвать возрастающей на всей области определения, поскольку значение этой функции при любом положительном значении аргумента меньше, чем её значение при любом отрицательном значении аргумента.

Гипербола, являющаяся графиком функции $y = \frac{k}{x}$ при $k \neq 0$, не пересекает ось ординат, поскольку область определения этой функции задаётся условием $x \neq 0$. Эта гипербола не пересекает также и ось абсцисс. Действительно, если предположить противное, т. е. что $y = 0$ при некотором значении x, то при этом значении x имели бы:

$$0 = \frac{k}{x};\ 0 \cdot x = k;\ 0 = k,$$

но по условию у нас $k \neq 0$. Полученное противоречие и показывает, что гипербола не пересекает ось абсцисс.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.

а) Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ (где $k \neq 0$) является … .

б) Графиком функции $y = \frac{k}{x}$ (где $k \neq 0$) является … .

2 а) Что такое ветви гиперболы $y=\frac{k}{x}$?

б) Как расположены относительно друг друга ветви гиперболы $y=\frac{k}{x}$?

3 Верно ли, что гипербола $y=\frac{k}{x}$ симметрична относительно:

а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат?

4 В каких четвертях расположена гипербола $y=\frac{k}{x}$ при разных значениях $k\neq 0$?

5 Какой формулой выражается обратно пропорциональная зависимость?

6 При каких значениях $k\neq 0$ функция $y=\frac{k}{x}$ является для положительных значений аргумента:
а) возрастающей; б) убывающей?

7 При каких значениях $k\neq 0$ функция $y=\frac{k}{x}$ является для отрицательных значений аргумента:
а) возрастающей; б) убывающей?

8 Расскажите, приводя примеры.
а) Какая функция называется нечётной?
б) Какими особенностями обладает график нечётной функции?

9 Найдите значения функции $y=\frac{12}{x}$ при указанных значениях аргумента:

а) 12; в) 24; д) 1,5; ж) $-0,2$;

б) -8; г) -4; е) $\frac{3}{4}$; з) 1.

10 Найдите значения функции $y=-\frac{2}{x}$ при указанных значениях аргумента:

а) 4; в) $\frac{2}{3}$; д) -12; ж) 16;

б) $-\frac{1}{4}$; г) $\frac{4}{7}$; е) $\frac{1}{2}$; з) $-\frac{2}{9}$.

11 Какие из точек принадлежат графику функции $y=\frac{20}{x}$:

а) $(4;\ 6)$; в) $(-4;\ -5)$; д) $(10;\ 2)$; ж) $(-1;\ -20)$;
б) $(-2;\ 10)$; г) $(0,5;\ 40)$; е) $(15;\ 1,5)$; з) $(-40;\ 0,5)$?

12 Графикам каких функций принадлежит точка $(4;\ 2)$:

а) $y=\frac{16}{x}$; б) $y=\frac{1}{4x}$; в) $y=\frac{8}{x}$; г) $y=-\frac{8}{x}$?

Н

13 Дана функция $y = \frac{7}{x}$. Сравните $y(u)$ и $y(v)$, если:

а) $u = 2{,}7$; $v = 2{,}8$;
б) $u = 2{,}7$; $v = -2{,}8$;
в) $u = -2{,}7$; $v = -2{,}8$;
г) $u = -2{,}7$; $v = 2{,}8$.

14 Для функции $y = -\frac{1}{3x}$ сравните $y(x_1)$ и $y(x_2)$, если:

а) $x_1 = \frac{5}{7}$; $x_2 = \frac{5}{8}$;
б) $x_1 = -\frac{16}{7}$; $x_2 = -\frac{17}{7}$;
в) $x_1 = -\frac{2}{9}$; $x_2 = \frac{2}{11}$;
г) $x_1 = \frac{8}{3}$; $x_2 = -\frac{8}{5}$.

15 Постройте в одной координатной плоскости графики $y = \frac{4}{x}$ и $y = -\frac{4}{x}$. Каковы особенности их взаимного расположения?

16 Может ли график функции $y = \frac{k}{x}$ быть расположенным в указанных четвертях? Если да, то укажите, при каком значении k. Если нет, объясните почему:

а) I и II; б) II и III; в) III и IV; г) II и IV.

17 В одной координатной плоскости (рис. 27) изображены графики функций $y = \frac{k_1}{x}$ (синего цвета) и $y = \frac{k_2}{x}$ (чёрного цвета). Определите знаки чисел k_1 и k_2.

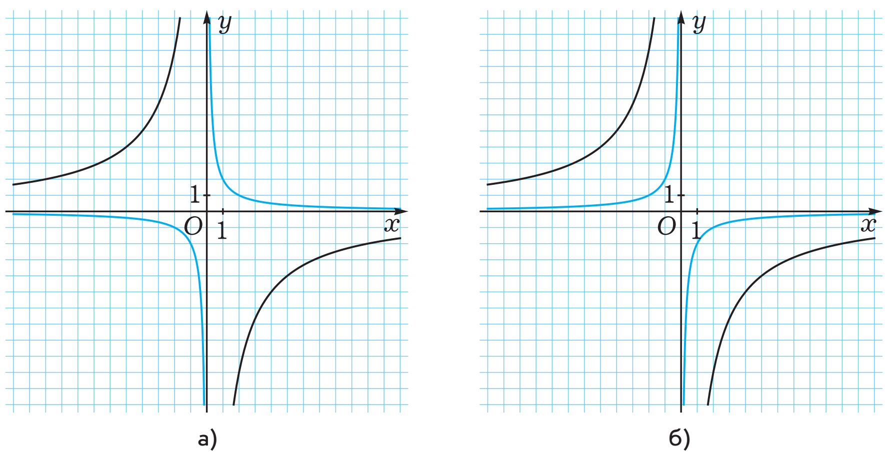


Рис. 27

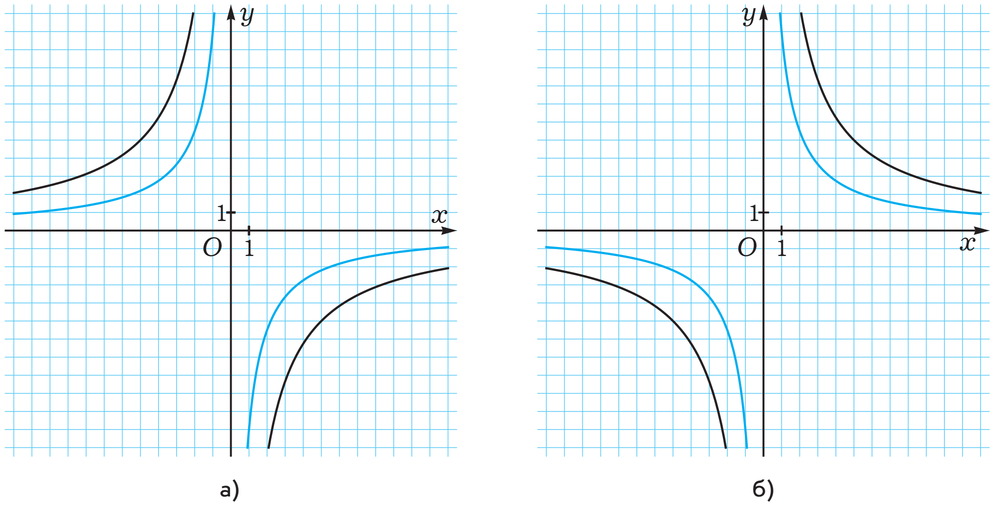


Рис. 28

П

18 Известно, что k_1 и k_2 — различные числа, ни одно из которых не равно нулю. Могут ли графики функций $y = \frac{k_1}{x}$ и $y = \frac{k_2}{x}$ пересекаться?

19 В одной координатной плоскости (рис. 28) изображены графики функций $y = \frac{k_1}{x}$ (синего цвета) и $y = \frac{k_2}{x}$ (чёрного цвета). Сравните числа k_1 и k_2.

20 Постройте графики функции $y = \frac{k}{x}$ в одной координатной плоскости при трёх различных значениях $k < 0$, а именно: при $k = -6$, $k = -2$, $k = -\frac{1}{2}$. Какие особенности взаимного расположения графиков вы видите?

21 Выясните, какие из функций являются нечётными:

а) $y = x(5 - x^2)$; в) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; д) $y = x^3 + x$; ж) $y = \frac{x}{71}$;

б) $y = \frac{1}{x^2}$; г) $y = -\frac{2}{x}$; е) $y = x^2 + 2x$; з) $y = x^6$.

22 Что можно сказать о функции, график которой симметричен относительно начала координат?

23 Постройте графики функций:

а) $y=\frac{4}{|x|}$; б) $y=\left|\frac{4}{x}\right|$; в) $y=-\frac{4}{|x|}$.

24 Имеет ли гипербола $y=\frac{4}{x}$ оси симметрии? Если да, то сколько и какие именно? Если нет, объясните почему.

25 В изучаемом параграфе мы всё время говорили о графике функции $y=\frac{k}{x}$ при $k \neq 0$. А что представляет собой график функции $y=\frac{k}{x}$ при $k=0$?

Проект «Графики»

Найдите несколько графиков в учебниках по изучаемым вами предметам, в книгах, газетах, журналах, в Интернете и проанализируйте их.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Наблюдение за движущимся объектом.

ВАША РОЛЬ. Наблюдатель-аналитик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. За движущимся по прямой неопознанным объектом наблюдали десять следящих станций, каждая в течение одного часа. При этом в каждый момент времени объект находился под наблюдением по меньшей мере одной станции, а общее время наблюдения составило 6 часов. Каждая из станций зафиксировала прохождение объектом расстояния 200 км.

ЗАДАНИЕ. Установите, какое наибольшее расстояние мог пройти объект за эти 6 часов.

ГЛАВА III КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

3.1 Понятие о квадратном корне и об арифметическом квадратном корне

Вспоминаем то, что знаем

- Найдите какое-нибудь действительное число, квадрат которого равен 49.
- Попробуйте найти все действительные числа, квадрат которых равен 49.
- Сформулируйте основные свойства функции $y = x^2$.

Открываем новые знания

- Попробуйте доказать, что нет никаких действительных чисел, кроме 3 и -3, квадрат которых равен 9.
- Закончите рассуждения:

  Пусть x — действительное число, отличное от 3 и -3, квадрат которого равен 9.

  а) Если число x — положительное и $x > 3$, то $x^2 > 3^2$, т.е. $x^2 > 9$. Значит, не может быть, чтобы $x^2 = 9$.

  б) Если число x — положительное и $x < 3$, то … .

  в) Если число x — отрицательное и $x < -3$, то… .

  г) Если число x — отрицательное и $x > -3$, то… .

?! Сколько существует действительных чисел, квадрат которых равен данному положительному числу?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Вам неоднократно приходилось решать задачу нахождения площади квадрата по известной длине его стороны. Ещё в начальной школе вы узнали, что площадь квадрата S выражается через длину его стороны a по формуле $S = a^2$. Скажем, если сторона квадрата равна 5 м, то его площадь составляет 5^2 м^2, или, после выполнения вычислений, 25 м^2.

Часто приходится решать обратную задачу, т.е., зная площадь квадрата, находить длину его стороны. Например, если нужно найти длину стороны квадрата, площадь которого равна 144 м^2, то, предположив, что длина стороны составляет x м, мы придём к уравнению $x^2 = 144$. Одно число, квадрат которого равен 144, мы знаем: это 12. Значит, можно утверждать, что площадь 144 м^2 имеет квадрат со стороной 12 м. Но вдруг уравнение $x^2 = 144$ имеет ещё и другие решения, кроме $x = 12$?

Для нахождения всех решений этого уравнения перенесём 144 в левую часть:

$$x^2 - 144 = 0,$$

после чего разложим левую часть на множители по формуле разности квадратов:

$$(x-12)(x+12) = 0.$$

Произведение двух множителей может быть равным нулю лишь в том случае, когда один из множителей равен нулю. Отсюда заключаем, что или $x-12=0$, т. е. $x=12$, или $x+12=0$, т. е. $x=-12$.

Таким образом, мы установили, что имеется только два действительных числа, квадрат которых равен 144. Это 12 и −12.

Что касается первоначальной задачи нахождения стороны квадрата с площадью 144 м^2, то её решением является только 12 м, поскольку сторона квадрата отрицательной быть не может.

Заметьте, что, решая уравнение $x^2 = 144$, мы искали числа, квадрат которых равен 144.

Поскольку похожие задачи возникают достаточно часто, то для таких чисел имеются специальные названия.

> *Квадратным корнем* из данного числа называется такое число, квадрат которого равен данному числу.

Скажем, квадратный корень из числа 144 — это такое число, квадрат которого равен 144. Как мы выяснили выше, таких чисел есть два: 12 и −12. Можно сказать, что 12 — это квадратный корень из 144, и −12 — это квадратный корень из 144.

Выше мы также выяснили, что для нахождения всех квадратных корней из числа 144 можно решить уравнение $x^2 = 144$. Аналогичные уравнения придётся решать для нахождения квадратных корней из других чисел.

Скажем, для нахождения квадратного корня из числа 2 нужно решить уравнение $x^2 = 2$. Его решения уже не удастся найти так быстро, как это произошло с уравнением $x^2 = 144$.

Вообще, для нахождения квадратных корней из числа a нужно решить уравнение $x^2 = a$. К исследованию вопроса о том, всегда ли такое уравнение имеет решения и сколько именно, мы сейчас и приступим.

Сначала отметим, что квадратных корней из отрицательных чисел не существует, поскольку квадрат никакого действительного числа не может быть отрицательным.

Квадратный корень из нуля существует, причём единственный, — это нуль. Действительно, $0^2 = 0$, и в то же время при $x \neq 0$ также и $x^2 \neq 0$.

Теперь займёмся вопросом о квадратных корнях из положительного числа a. Это удобно делать с помощью графика функции $y = x^2$, который мы изучали в предыдущей главе (рис. 29).

Задача о решении интересующего нас уравнения $x^2 = a$ сводится к тому, чтобы найти такие значения аргумента x, при которых значение функции $y = x^2$ рав-

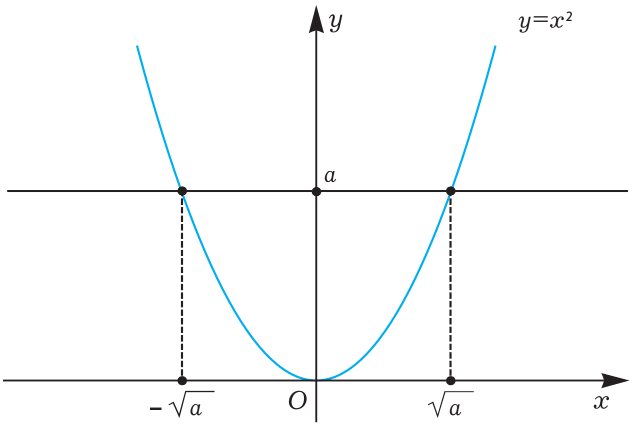


Рис. 29

но a (причём нас интересует случай $a > 0$). Как это делать, мы уже знаем. Нужно взять на оси ординат точку a и провести через неё прямую, перпендикулярную оси ординат до пересечения с графиком — параболой $y = x^2$. Абсциссы полученных точек и будут решениями уравнения $x^2 = a$.

Как видно из рис. 29, таких точек пересечения имеется две. Поскольку функция $y = x^2$ является чётной и её график симметричен относительно оси ординат, то абсциссы этих точек являются противоположными числами.

Таким образом, при $a > 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет два различных решения, являющихся противоположными числами. Это значит, что существует ровно два квадратных корня из любого положительного числа, у них одинаковые модули и противоположные знаки, т.е. один из этих квадратных корней положителен, а другой — отрицателен.

При этом у положительного квадратного корня имеется специальное название.

Арифметическим квадратным корнем из данного неотрицательного числа называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен данному числу.

То же самое можно записать по-другому, используя буквенные обозначения. Арифметический квадратный корень из неотрицательного числа a — это такое неотрицательное число b, что $a = b^2$.

Для обозначения арифметического квадратного корня используется специальный символ $\sqrt{}$, называемый знаком арифметического квадратного корня или знаком радикала (по латыни слово «корень» звучит как «радикс»). Скажем, арифметический квадратный корень из числа a обозначается $\sqrt{a}$.

По определению арифметического квадратного корня запись $\sqrt{a}=b$ обозначает, что $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ и $a=b^2$. При этом понятно, что из того, что $a=b^2$, верность неравенства $a\geqslant 0$ следует автоматически. Таким образом, имеет место одно из важнейших в школьной математике соотношений:

$$\sqrt{a}=b \Leftrightarrow \begin{cases} a=b^2, \\ b\geqslant 0, \end{cases}$$

называемое *основной равносильностью для арифметического квадратного корня*.

Скажем, $\sqrt{49}=7$, поскольку $49=7^2$ и $7\geqslant 0$.

Можно сказать по-другому. Имеется два квадратных корня из 49 — это 7 и −7. Запись $\sqrt{49}$ обозначает арифметический (т. е. неотрицательный) квадратный корень из 49. Это 7.

Арифметический квадратный корень из любого неотрицательного числа существует, причём единственный.

Число a в записи арифметического квадратного корня $\sqrt{a}$ называется *подкоренным выражением*. Операция нахождения значения арифметического квадратного корня называется *извлечением* корня. Скажем, запись $\sqrt{49}=7$ можно трактовать так: при извлечении арифметического квадратного корня из 49 получили 7.

Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл лишь при $a\geqslant 0$.

Из определения арифметического квадратного корня следует, что:

1) при $a\geqslant 0$ выполняется соотношение: $\sqrt{a}\geqslant 0$.

2) при $a\geqslant 0$ выполняется соотношение: $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

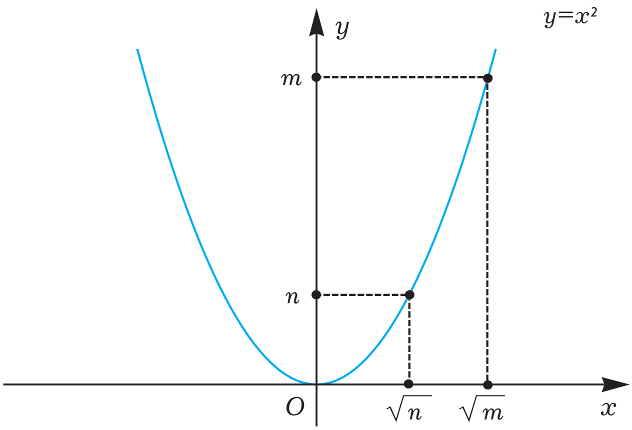


Рис. 30

Из рис. 30 видны ещё два важных свойства арифметического квадратного корня.

Если числа m и n неотрицательны и $m > n$, то $\sqrt{m} > \sqrt{n}$.

Если числа m и n неотрицательны и $\sqrt{m} > \sqrt{n}$, то $m > n$.

С помощью этих свойств можно сравнивать арифметические квадратные корни. Скажем, $\sqrt{11} < \sqrt{14}$, поскольку $11 < 14$. Можно сказать так: из двух арифметических квадратных корней больше тот, у которого подкоренное выражение больше (естественно, оба подкоренных выражения должны быть неотрицательны).

На этих же свойствах основаны некоторые методы приближённого извлечения квадратных корней, о чём будет идти речь в следующем параграфе.

В заключение параграфа посмотрим, как основная равносильность для арифметического квадратного корня позволяет решать простейшие уравнения, содержащие неизвестное под знаком арифметического квадратного корня.

Решим, например, уравнение $\sqrt{x} = 6$.

Мы знаем, что запись $\sqrt{x} = 6$ равносильна тому, что $x = 6^2$ и $6 \geqslant 0$; но так как второе соотношение верно, то остаётся $x = 6^2$, или $x = 36$.

Запись можно вести так:

$$\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6^2, \\ 6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 36. \text{ Ответ: } x = 36.$$

Решим уравнение $\sqrt{7 - x} = -2$.

Запись $\sqrt{7 - x} = -2$ равносильна тому, что $7 - x = (-2)^2$ и $-2 \geqslant 0$; но так как второе соотношение неверно, то решений нет.

Можно было рассуждать по-другому. Так как $\sqrt{7 - x} \geqslant 0$, то равенство $\sqrt{7 - x} = -2$ невозможно ни при каком значении x.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.

а) Квадратным корнем из данного числа называется … .

б) Если число отрицательно, то квадратный корень из этого числа … .

в) Если число положительно, то количество различных квадратных корней из этого числа равно … .

г) Если имеется два различных квадратных корня из некоторого числа, то эти корни … .

2 Расскажите, приводя примеры:

а) что такое арифметический квадратный корень;

б) как обозначается арифметический квадратный корень;

в) сколько существует арифметических квадратных корней из данного числа;

г) могут ли быть равны арифметические квадратные корни из различных чисел.

3 Закончите предложение.

а) Арифметический квадратный корень из числа существует, только если это число ... .

б) Если возвести арифметический квадратный корень из некоторого неотрицательного числа в квадрат, то получим ... .

в) Подкоренным выражением в арифметическом квадратном корне называется ... .

4 Сколько решений имеет уравнение:

а) $x^2 = 36$; б) $x^2 = -36$; в) $x^2 = 0$; г) $x^2 = 8$?

5 Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{-1}$; г) $\sqrt{3-3}$;

б) $\sqrt{0{,}002}$; д) $\sqrt{6-8}$;

в) $-\sqrt{2}$; е) $\sqrt{6}-\sqrt{8}$?

6 Какие из равенств верные? Обоснуйте свой ответ.

а) $\sqrt{9} = 3$; в) $\sqrt{12} = 3{,}4$; д) $\sqrt{8} = 2$; ж) $\sqrt{81} = -9$;

б) $\sqrt{4} = -2$; г) $\sqrt{-16} = 4$; е) $\sqrt{25} = 5$; з) $\sqrt{144} = 12$.

7 Вычислите:

а) $\sqrt{64}$; в) $\sqrt{0{,}09}$; д) $\sqrt{121}$; ж) $4\sqrt{4}$;

б) $\sqrt{196}$; г) $-\sqrt{16}$; е) $\sqrt{1{,}21}$; з) $\sqrt{0{,}0049}$.

Н

8 Вычислите:

а) $\sqrt{9}+6$; д) $4\sqrt{144}$;

б) $\sqrt{100}-\sqrt{400}$; е) $1{,}1-\sqrt{1{,}21}$;

в) $\sqrt{25}-\sqrt{16}$; ж) $\sqrt{49}\cdot\sqrt{4}$;

г) $\sqrt{25-16}$; з) $1{,}2:\sqrt{0{,}25}$.

9 Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{5}\right)^2$; в) $\left(2\sqrt{11}\right)^2$; д) $-\left(\sqrt{6}\right)^2$; ж) $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}\right)^2$;

б) $7\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$; г) $\left(-\sqrt{6}\right)^2$; е) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)^2$; з) $\left(\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}\right)^2$.

10 Вычислите:

а) $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$; б) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$; в) $\left(\sqrt{7}+1\right)^2-2\sqrt{7}$.

11 При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{a}$; б) $\sqrt{-b}$; в) $-\sqrt{c}$; г) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$?

12 Сравните (>, <, =):

а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{7}$ и 3; д) $\sqrt{3}$ и 1,7; ж) $\sqrt{10}$ и 3,2;

б) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{6{,}95}$; г) $\sqrt{\frac{6}{5}}$ и $\sqrt{\frac{5}{6}}$; е) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ и $\sqrt{\frac{20}{23}}$; з) $\sqrt{6{,}25}$ и $2\frac{1}{2}$.

13 Определите, между какими последовательными натуральными числами заключено число:

а) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt{55}$; д) $\sqrt{200}$;

б) $\sqrt{19}$; г) $\sqrt{111}$; е) $\sqrt{409}$.

14 Решите уравнение:

а) $x^2 = 49$; б) $x^2 = -25$; в) $x^2 = 5$; г) $x^2 = 0{,}3$.

15 Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-3} = 4$; б) $\sqrt{x} = 7$; в) $\sqrt{z} = 13$; г) $\sqrt{1-y} = 5$.

П

16 Упростите:

а) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2$; в) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$;

б) $\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^4$; г) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}$.

17 Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} = x$; в) $\sqrt{x^2-32} = x$;

б) $\sqrt{x} = 5x$; г) $\sqrt{2x-1} = x$.

3.2 Приближённое извлечение арифметических квадратных корней

Вспоминаем то, что знаем

- Какие числа называются рациональными? Приведите примеры.
- Какие числа называются иррациональными? Приведите примеры.
- Что называется для некоторого числа приближением до заданного десятичного разряда с недостатком и с избытком?
- Как найти приближённое значение величины с точностью до заданного десятичного разряда?

Открываем новые знания

- Найдите для числа $\sqrt{5}$ приближения до целых с недостатком и с избытком.
- Найдите для числа $\sqrt{5}$ приближения до десятых с недостатком и с избытком.
- Вычислите приближённо $\sqrt{5}$ с точностью до целых.
- Вычислите приближённо $\sqrt{5}$ с точностью до десятых.

?! Как вычислить приближённо арифметический квадратный корень из данного числа с точностью до заданного десятичного разряда?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

В предыдущем параграфе мы выяснили, что для любого неотрицательного a существует арифметический квадратный корень $\sqrt{a}$, причём единственный. При некоторых числовых значениях a нахождение его числового значения, или, как ещё говорят, вычисление или извлечение корня, не представляет никаких трудностей. Скажем, $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{2{,}25}=1{,}5$ и т. д. Но уже вычисление, скажем, $\sqrt{2}$ является совсем не простой задачей.

Понятно, что $\sqrt{2}$ не является целым числом, поскольку $\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$, т. е. $1<\sqrt{2}<2$.

Таким образом, с точностью до целых значение $\sqrt{2}$ с недостатком равно 1, а с избытком 2.

Если брать приближённое значение $\sqrt{2}$ с точностью до десятых, то можно заключить, что $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, так как $1{,}4=\sqrt{1{,}96}<\sqrt{2}$, $1{,}5=\sqrt{2{,}25}>\sqrt{2}$.

Мы установили, что с точностью до десятых значение $\sqrt{2}$ с недостатком равно 1,4, а с избытком 1,5.

Точно так же можно искать значение $\sqrt{2}$ с точностью до сотых, тысячных и т. д.

На уроках математики в 6-м классе, когда вы изучали иррациональные числа, говорилось о том, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным и что этот факт был впервые обнаружен в VI в. до н. э. в Древней Греции, в школе Пифагора. Это открытие затрагивало самые основы древнегреческой математики, поскольку ранее считалось, что любое положительное число равно отношению двух натуральных чисел, т. е. является рациональным.

Докажем иррациональность числа $\sqrt{2}$. Предположим противное, пусть число $\sqrt{2}$ рационально и равно обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Эту дробь можно считать несократимой — ведь любая обыкновенная дробь равна некоторой несократимой дроби.

Из того, что $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, следует, что $2=\frac{m^2}{n^2}$, или $m^2=2n^2$. Поскольку правая часть этого равенства — чётное натуральное число, то левая тоже, а значит, число m — чётное. Тогда можно записать, что $m=2k$, где k — натуральное число. Подставляя это соотношение в равенство $m^2=2n^2$, получим $(2k)^2=2n^2$, $4k^2=2n^2$

и, наконец, $2k^2 = n^2$. Далее проводим такое же рассуждение, как выше: поскольку левая часть этого равенства — чётное натуральное число, то правая тоже, а значит, число n — чётное. В результате оказывается, что числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ являются чётными натуральными числами, следовательно, эту дробь можно сократить на 2, что противоречит предположению о её несократимости. Итак, доказано, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Заметим, что аналогичные рассуждения позволяют доказать иррациональность чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и т. д. Вообще, оказывается, если число n — натуральное, то число $\sqrt{n}$ — либо натуральное, либо иррациональное.

Таким образом, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и т. д. записываются в виде бесконечных непериодических десятичных дробей. На практике часто пользуются приближёнными значениями этих радикалов с точностью до нужного десятичного разряда. Эти приближённые значения можно получать с помощью специальных таблиц или с помощью калькулятора. Если ввести в калькулятор, скажем, число 2, а затем нажать на клавишу $\boxed{\sqrt{\ }}$, то на экране высветится значение $\sqrt{2}$ с таким количеством десятичных разрядов, которое предусмотрено данной моделью калькулятора, обычно 8 или 9. Последняя цифра является сомнительной, а все предыдущие цифры верны. Скажем, при приближённом вычислении $\sqrt{2}$ получили 1,4142135. Если нам нужно приближённое значение $\sqrt{2}$ с точностью до тысячных, то можно записать $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, если до стотысячных, то $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$. Для большинства реальных расчётов точности обычного калькулятора, как правило, хватает. Если же нужна более высокая точность, то можно воспользоваться специализированными калькуляторами или специальными компьютерными программами.

Развиваем умения

Н

1 Может ли арифметический квадратный корень из простого числа быть натуральным числом?

2 Восьмиклассник Вадя утверждает, что арифметический квадратный корень из натурального числа не может быть рациональным числом. Прав ли Вадя?

3 Восьмиклассник Вася утверждает, что если арифметический квадратный корень из натурального числа является рациональным числом, то это рациональное число — натуральное. Прав ли Вася?

4 Вычислите с точностью до десятых, не пользуясь таблицами и калькулятором:
а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt{14}$; г) $\sqrt{89}$.

Н

5 С помощью калькулятора вычислите с точностью до тысячных:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt{14}$; г) $\sqrt{89}$.

6 С помощью калькулятора вычислите с точностью до сотых:

а) $\sqrt{33}+2{,}2$; в) $\sqrt{3{,}8\cdot 2{,}1}$;

б) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$; г) $\sqrt{0{,}0202+0{,}2002}$.

7 Вычислите с помощью калькулятора:

а) $\sqrt{361}$; б) $\sqrt{1369}$; в) $\sqrt{7^2+24^2}$; г) $\sqrt{0{,}3\cdot 58{,}8}$.

8 Найдите приближённые решения уравнений с точностью до десятых:

а) $x^2=20$; б) $x^2=2{,}5$; в) $x^2=530$; г) $x^2=8282$.

П

9 Докажите, что число $\sqrt{7}$ иррационально.

10 Какие из чисел иррациональны:

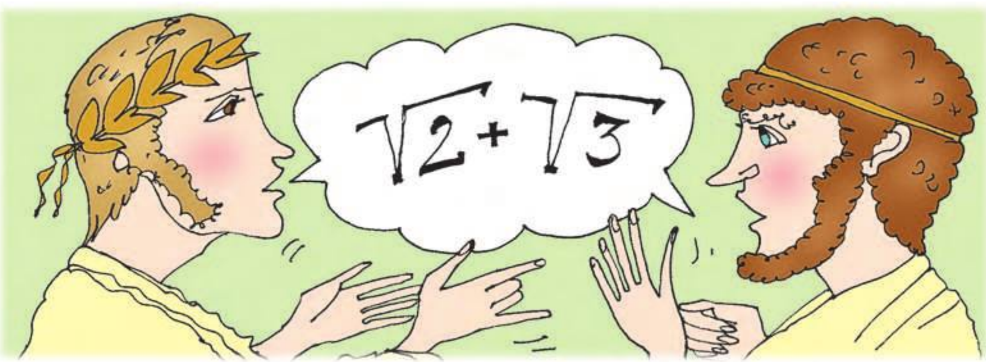
а) $\sqrt{2}-1$; в) $2\sqrt{7}+0{,}33$; д) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$;

б) $3\sqrt{2}$; г) $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$; е) $(\sqrt{2}-1)^2$?

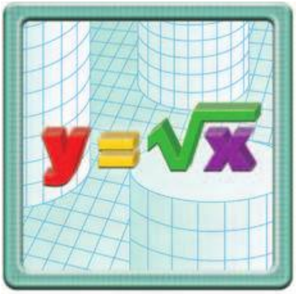
М

11 Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

12 Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным числом? Обоснуйте свой ответ.



3.3 Функция $y = \sqrt{x}$ и её график



Вспоминаем то, что знаем

- Что такое арифметический квадратный корень?
- Что означает запись $y = \sqrt{x}$?
- Какие значения может принимать аргумент x функции $y = \sqrt{x}$? Какие значения может принимать функция?
- Сравните значения функции $y = \sqrt{x}$ при значениях аргумента x_1 и x_2, таких, что $0 \leqslant x_1 < x_2$.

Открываем новые знания

- Какова область определения функции $y = \sqrt{x}$?
- Найдите значения функции $y = \sqrt{x}$ при нескольких значениях аргумента, нанесите соответственные точки на координатную плоскость и соедините их плавной линией.
- Какие особенности графика функции $y = \sqrt{x}$ вы можете назвать?

?! Как выглядит график функции $y = \sqrt{x}$?
Какими свойствами обладает график функции $y = \sqrt{x}$?
Какой известной вам линией является график функции $y = \sqrt{x}$?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Рассмотрим функцию, задаваемую формулой $y = \sqrt{x}$. Вы уже знаете, что областью определения этой функции является множество всех неотрицательных действительных чисел. Это обычно записывается в виде: $x \geqslant 0$. Из определения арифметического квадратного корня следует, что все значения функции $y = \sqrt{x}$ тоже неотрицательны, а из установленного в параграфе 3.1 факта, что уравнение $x^2 = a$ имеет решения при всех $a \geqslant 0$, дополнительно следует, что функция $y = \sqrt{x}$ принимает *все* неотрицательные значения.

В параграфе 3.1 было также установлено, что если числа m и n неотрицательны и $m > n$, то $\sqrt{m} > \sqrt{n}$. Это значит, что функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей на всей области определения $x \geqslant 0$.

Построим график функции $y = \sqrt{x}$. Начнём, как обычно, с нахождения значений функции при нескольких значениях аргумента из области определения функции и заполнения таблицы. Значения некоторых корней будем вычислять приближённо с помощью калькулятора с точностью до десятых (при единичном отрезке 1 см это вполне разумная точность).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
y	0	0,7	1	1,2	1,4	1,6	1,7	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3

Нанесём полученные точки на координатную плоскость (рис. 31).

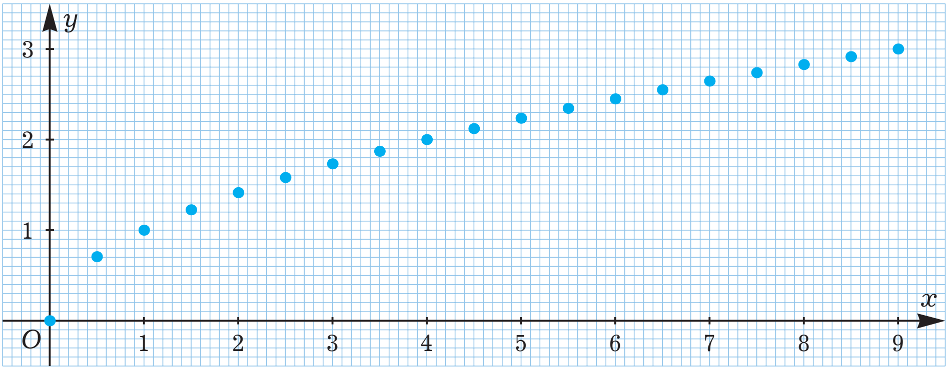


Рис. 31

Соединим отмеченные точки плавной линией (рис. 32).

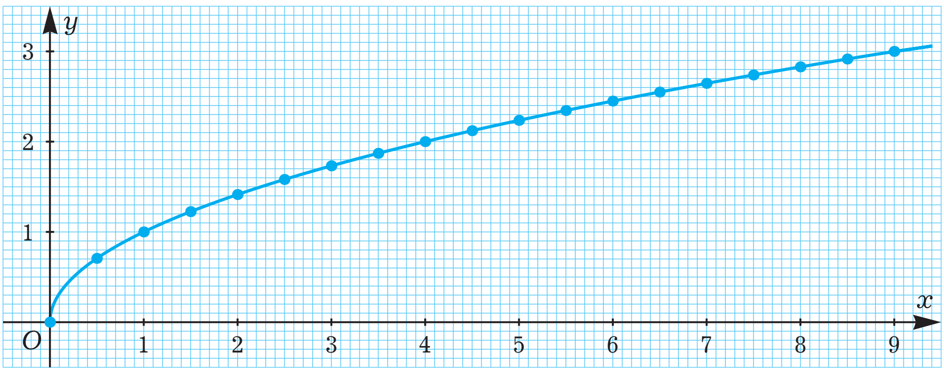


Рис. 32

Мы получили график функции $y = \sqrt{x}$. Видно, что он полностью лежит в первой четверти. Впрочем, мы могли это прогнозировать заранее, так как установили соотношения $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ для аргумента и функции.

Полученная линия представляет собой одну ветвь параболы $y = x^2$, но расположенной так, что её осью является не ось ординат, а ось абсцисс. Чтобы убедиться в этом, изобразим в одной координатной плоскости график функции $y = \sqrt{x}$ и график функции $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ (рис. 33).

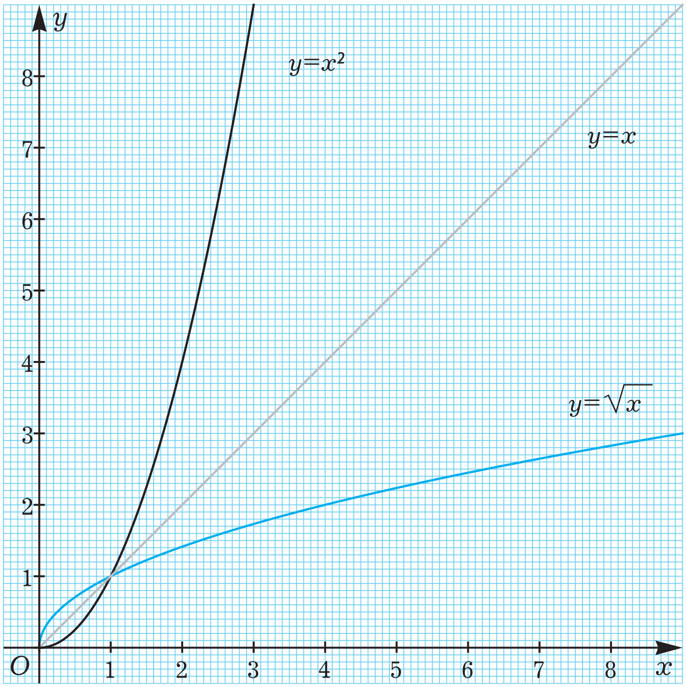


Рис. 33

Видно, что построенные линии симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла, которая лежит, как вы знаете, на прямой $y=x$.

Для доказательства этой симметричности рассмотрим на графике $y=\sqrt{x}$ точку $(u;\, v)$. Это значит, что $v=\sqrt{u}$. По определению арифметического квадратного корня это значит, что числа u и v таковы, что $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и $v^2=u$. Если последнее равенство переписать в виде $u=v^2$, то станет понятно, что точка $(v;\, u)$ лежит на параболе $y=x^2$, а условия $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ уточняют, что на той ветви этой параболы, которая расположена в первой четверти.

Осталось убедиться, что точки $A(u;\, v)$ и $B(v;\, u)$, лежащие в первой четверти, симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла. Нарисуем чертёж (рис. 34), предположив, что $u>v$ (случай $u<v$ рассматривается аналогично, а в случае $u=v$ всё сразу ясно).

Прямоугольные треугольники OAM и OBN равны по двум катетам ($OM = ON = u$, $AM = BN = v$).

Отсюда следует, что $OA=OB$ и $\angle AOM = \angle BON$, а поскольку $\angle AOC = 45^\circ - \angle AOM$, $\angle BOC = 45^\circ - \angle BON$, то $\angle AOC = \angle BOC$. Таким образом, треугольник AOB — равнобедренный с основанием AB, а отрезок OC в нём является биссектрисой, проведённой к основанию. Как вы знаете из курса геометрии, этот отрезок является также высотой и медианой, т. е. $OC \perp AB$ и $OC = CB$.

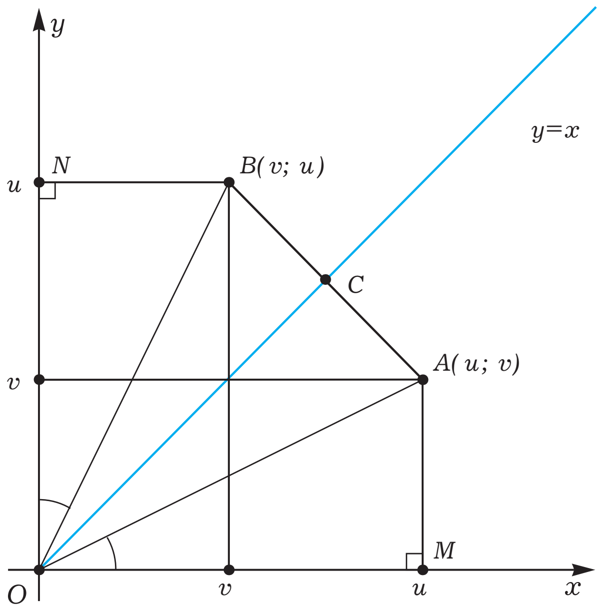


Рис. 34

А это как раз и значит, что точки $A(u; v)$ и $B(v; u)$ симметричны относительно прямой $y = x$, и доказательство закончено.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.
а) Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является … .
б) Все значения функции $y = \sqrt{x}$ являются … .
в) Графиком функции $y = \sqrt{x}$ является … .

2 В каких четвертях расположен график функции $y = \sqrt{x}$?

3 Является ли функция $y = \sqrt{x}$:
а) возрастающей; в) чётной;
б) убывающей; г) нечётной?

4 а) Симметричен ли график функции $y = \sqrt{x}$ какому-нибудь другому известному вам графику относительно какой-нибудь прямой?
б) Если да, то какому именно и относительно какой прямой?

5 Начертите график зависимости стороны квадрата a (в м) от его площади S (в м^2).

6 Найдите значения функции $y=\sqrt{x}$ при указанных значениях аргумента:

а) 16; в) 0,09; д) 144; ж) 0,49;

б) 49; г) 25; е) 0,04; з) 0,0144.

7 Найдите значения функции $y=\sqrt{x}$ при указанных значениях аргумента:

а) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{16}{25}$; д) $\frac{81}{16}$; ж) -25;

б) $-\frac{1}{4}$; г) 1,21; е) 400; з) 0,81.

8 Какие из точек принадлежат графику функции $y=\sqrt{x}$:

а) $(4;\ 2)$; в) $(16;\ 5)$; д) $(1{,}21;\ 1{,}1)$; ж) $(0{,}25;\ 0{,}5)$;

б) $(4;\ -2)$; г) $(25;\ 5)$; е) $\left(\frac{2}{3};\ \frac{4}{9}\right)$; з) $(9;\ 3)$?

Н

9 Сравните, не вычисляя:

а) $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$; д) 5 и $\sqrt{24}$;

б) $\sqrt{15}$ и 4; е) $\sqrt{77}$ и 9;

в) $\sqrt{0{,}4}$ и $\sqrt{0{,}3}$; ж) $\sqrt{0{,}1}$ и $\sqrt{0{,}01}$;

г) $\sqrt{23}$ и $\sqrt{23{,}1}$; з) $\sqrt{17}$ и $\sqrt{12}$.

10 Дана функция $y=\sqrt{x}$. Сравните $y(u)$ и $y(v)$, если:

а) $u=2{,}7$; $v=2{,}66$; в) $u=234$; $v=243$;

б) $u=1{,}00001$; $v=1{,}0001$; г) $u=56{,}1682$; $v=56{,}1692$.

11 Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\sqrt{11}$, $\sqrt{17{,}1}$ и 4; в) 12, $\sqrt{145}$ и $\sqrt{120}$;

б) $\sqrt{22}$, 5 и $\sqrt{21}$; г) $\sqrt{25}$, 4 и $\sqrt{52}$.

12 Пересекается ли график функции $y=\sqrt{x}$ с прямой:

а) $y=4$; б) $y=-9$; в) $y=14$; г) $y=0$?

Если да, найдите координаты точек пересечения; если нет, объясните почему.

П

13 Пересекается ли график функции $y=\sqrt{x}$ с прямой:

а) $y=x+4$; б) $y=-x+2$; в) $y=\frac{1}{3}x$; г) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$?

Если да, найдите координаты точек пересечения; если нет, объясните почему.

14 Решите графически уравнение:

а) $x^2 = \sqrt{x}$; б) $\sqrt{x} = -\frac{1}{x}$; в) $\sqrt{x} = 2x - 3$; г) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$.

М

15 Постройте график функции:

а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{-x}$; в) $y = -\sqrt{-x}$.

3.4 Свойства арифметических квадратных корней

Вспоминаем то, что знаем

- Что такое квадратный корень?
- Что такое арифметический квадратный корень?
- Что означает запись $\sqrt{a}$?
- Преобразуйте выражение $\left(\sqrt{a}\right)^2$.

Открываем новые знания

- Закончите вычисления и сравните результаты:

  а) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \ldots$; б) $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = \ldots$.
- Рассмотрев несколько числовых примеров, выскажите предположение о том, как связаны между собой значения выражений $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0, b \geqslant 0$. Попробуйте обосновать это предположение.
- Закончите вычисления и сравните результаты:

  а) $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16}} = \ldots$; б) $\sqrt{\frac{144}{16}} = \sqrt{9} = \ldots$.
- Рассмотрев несколько числовых примеров, выскажите предположение о том, как связаны между собой значения выражений $\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geqslant 0, b > 0$. Попробуйте обосновать это предположение.

?! Чему равен арифметический квадратный корень из произведения неотрицательных сомножителей?
Чему равен арифметический квадратный корень из частного, где делимое неотрицательно, а делитель положителен?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

В этом параграфе мы выведем несколько формул для арифметических квадратных корней.

Одну формулу мы уже знаем из параграфа 3.1:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \text{ при всех } a \geqslant 0.$$

Эту формулу можно прочитать так.

При возведении арифметического квадратного корня в квадрат получается подкоренное выражение.

Докажем формулу:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ при всех } a \geqslant 0 \text{ и } b \geqslant 0.$$

Арифметический квадратный корень из произведения неотрицательных сомножителей равен произведению арифметических квадратных корней из этих сомножителей.

Для доказательства заметим, что по свойству, сформулированному перед доказываемым, в сочетании с правилом возведения произведения в степень имеем:

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab.$$

Кроме этого, так как $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$ и $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$, то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$.

Таким образом, выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ неотрицательно и его квадрат равен ab. По определению это выражение есть арифметический квадратный корень из ab, т. е. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, что и требовалось доказать.

Выведенная формула применяется для упрощения вычислений с радикалами.

Рассмотрим несколько примеров:

$\sqrt{36 \cdot 25} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{25} = 6 \cdot 5 = 30;$

$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4.$

Формула для арифметического квадратного корня из произведения справедлива также для трёх, четырёх и т. д. сомножителей. Скажем:

$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$ при всех $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

Например:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{1{,}5} = \sqrt{2 \cdot 12 \cdot 1{,}5} = \sqrt{36} = 6.$

Обсуждаемая формула может в одном и том же преобразовании применяться и для двух, и для трёх радикалов (и для другого количества). Например:

$\sqrt{72} \cdot \sqrt{162} = \sqrt{72 \cdot 162} = \sqrt{(36 \cdot 2) \cdot (81 \cdot 2)} = \sqrt{36 \cdot 81 \cdot 4} =$

$= \sqrt{36} \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 6 \cdot 9 \cdot 2 = 108.$

Особо отметим: применяя обсуждаемую формулу, очень важно помнить, что каждый множитель в подкоренном выражении должен быть неотрицательным, и не забывать проверять это.

Например, если, преобразовывая радикал $\sqrt{xy}$, мы напишем машинально $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ без анализа ситуации, то это будет грубой ошибкой. Действительно, область допустимых значений букв в преобразуемом выражении $\sqrt{xy}$ задаётся соотношением $xy \geqslant 0$, а это вовсе не значит, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ в отдельности, как того требует формула. В выражении $\sqrt{xy}$ допустимыми значениями букв являются, например $x=-2$, $y=-3$. Ясно, что недопустимо писать $\sqrt{-2\cdot(-3)}=\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$, так как правая часть не имеет смысла (что касается левой, то она имеет смысл и равна $\sqrt{6}$).

Теперь познакомимся с аналогичной формулой для частного:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при всех } a \geqslant 0 \text{ и } b>0.$$

Арифметический квадратный корень из частного, где делимое неотрицательно, а делитель положителен, равен соответственному частному арифметических квадратных корней.

Можно дать другую, более длинную формулировку.

При извлечении арифметического квадратного корня из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем можно отдельно извлечь корень из числителя и записать в числителе и отдельно извлечь корень из знаменателя и записать в знаменателе.

Доказательство этой формулы абсолютно аналогично приведённому выше доказательству формулы для произведения, и чрезвычайно полезно провести его самостоятельно.

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы:

$$\sqrt{\frac{36}{121}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{121}}=\frac{6}{11};$$

$$\sqrt{63}:\sqrt{7}=\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{63}{7}}=\sqrt{9}=3.$$

Аналогично тому, как было обсуждено для произведения, в этом случае необходимо следить за знаками числителя и знаменателя.

В заключение рассмотрим ещё одну важную формулу:

$$\sqrt{a^2}=|a| \text{ при всех действительных } a.$$

Арифметический квадратный корень из квадрата любого выражения равен модулю выражения, возводимого в квадрат.

Эта формула одновременно проще предыдущих, так как в ней нет никаких ограничений на входящие в неё буквы, и сложнее, так как в ней присутствует модуль.

Для доказательства рассматриваемой формулы нужно убедиться, что выражение $|a|$ неотрицательно и его квадрат равен подкоренному выражению.

То, что модуль любого числа неотрицателен, вы знаете ещё из курса математики 6-го класса.

Осталось проверить, что $|a|^2 = a^2$.

Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$ и $|a|^2 = a^2$, что и требуется.

Если $a < 0$, то $|a| = -a$ и $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$, что и требуется.

Таким образом, формула доказана.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.

а) При возведении арифметического квадратного корня в квадрат получается … .

б) Арифметический квадратный корень из произведения неотрицательных сомножителей равен … .

в) Арифметический квадратный корень из частного, где делимое неотрицательно, а делитель положителен, равен … .

г) Арифметический квадратный корень из квадрата любого выражения равен … .

2 Закончите предложение.

а) Произведение двух арифметических квадратных корней равно … .

б) Произведение нескольких арифметических квадратных корней равно … .

в) Частное двух арифметических квадратных корней равно … .

3 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{49\cdot 81}$; в) $\sqrt{0{,}01\cdot 0{,}81}$; д) $\sqrt{0{,}36\cdot 121}$; ж) $\sqrt{0{,}04\cdot 1{,}69}$;

б) $\sqrt{25\cdot 16}$; г) $\sqrt{4\cdot 9}$; е) $\sqrt{49\cdot 100}$; з) $\sqrt{4{,}41\cdot 441}$.

4 Найдите значение арифметического квадратного корня:

а) $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$; в) $\sqrt{\dfrac{81}{100}}$; д) $\sqrt{7\dfrac{1}{9}}$; ж) $\sqrt{5\dfrac{1}{16}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{49}{25}}$; г) $\sqrt{\dfrac{144}{121}}$; е) $\sqrt{1\dfrac{15}{49}}$; з) $\sqrt{1\dfrac{13}{36}}$.

5 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{25}{36}\cdot\frac{49}{81}}$;

б) $\sqrt{\frac{9}{4}\cdot\frac{25}{36}}$;

в) $\sqrt{\frac{144}{25}\cdot\frac{4}{49}\cdot\frac{81}{121}}$;

г) $\sqrt{\frac{1}{64}\cdot\frac{25}{49}\cdot\frac{225}{100}}$;

д) $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot 2\frac{7}{9}}$;

е) $\sqrt{5\frac{4}{9}\cdot 5\frac{1}{16}}$;

ж) $\sqrt{2\frac{23}{49}\cdot 2\frac{2}{49}}$;

з) $\sqrt{5\frac{19}{25}\cdot 2\frac{7}{81}}$.

6 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{45\cdot 405}$;

б) $\sqrt{45\cdot 405}$;

в) $\sqrt{135\cdot 60}$;

г) $\sqrt{50\cdot 200}$;

д) $\sqrt{0,48\cdot 108}$;

е) $\sqrt{0,03\cdot 3}$;

ж) $\sqrt{0,7\cdot 2,8}$;

з) $\sqrt{0,012\cdot 0,432}$.

7 Найдите значение произведения:

а) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$;

б) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{686}$;

в) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$;

г) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}$;

д) $\sqrt{0,7}\cdot\sqrt{280}$;

е) $\sqrt{0,08}\cdot\sqrt{2}$;

ж) $\sqrt{11}\cdot\sqrt{44}$;

з) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$.

8 Найдите значение частного:

а) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$;

б) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}}$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$;

г) $\sqrt{26}:\sqrt{\frac{2}{13}}$;

д) $\frac{\sqrt{0,7}}{\sqrt{6,3}}$;

е) $\sqrt{\frac{26}{11}}:\sqrt{\frac{18}{143}}$;

ж) $\frac{\sqrt{3,2}}{\sqrt{0,8}}$;

з) $\frac{\sqrt{0,17}}{\sqrt{1,53}}$.

Н

9 Вычислите:

а) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}$;

б) $\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}}{\sqrt{15}}$;

в) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{55}\cdot\sqrt{22}$;

г) $\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{91}}$.

10 Запишите выражение в виде произведения двух радикалов:

а) $\sqrt{6}$;

б) $\sqrt{11g}$;

в) $\sqrt{21}$;

г) $\sqrt{2s}$;

д) $\sqrt{17a}$;

е) $\sqrt{70}$;

ж) $\sqrt{z}$;

з) $\sqrt{143}$.

11 Запишите в виде частного радикалов:

а) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; в) $\sqrt{56}$; д) $\sqrt{3x}$; ж) $\sqrt{\dfrac{10}{w}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{a}{2}}$; г) $\sqrt{\dfrac{2}{3}h}$; е) $\sqrt{5}$; з) $\sqrt{19g}$.

12 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{25^2-24^2}$; в) $\sqrt{35^2-28^2}$; д) $\sqrt{24^2+7^2}$;

б) $\sqrt{5^2+12^2}$; г) $\sqrt{80^2-48^2}$; е) $\sqrt{169^2-120^2}$.

13 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{9{,}5^2}$; в) $\sqrt{(-4)^2}$; д) $\sqrt{5^4}$; ж) $\sqrt{(-11)^2}$;

б) $\sqrt{192^2}$; г) $\sqrt{3^6}$; е) $\sqrt{2^{10}}$; з) $\sqrt{9^4}$.

14 Вычислите:

а) $\sqrt{(-5)^4}$; б) $\sqrt{2^{10}}$; в) $\sqrt{(-2)^8}$; г) $\sqrt{(-3)^6}$.

15 Упростите выражение:

а) $\sqrt{n^2}$, если $n \geqslant 0$; д) $\sqrt{(-3u)^4}$, если $u \geqslant 0$;

б) $\sqrt{z^2}$, если $z \leqslant 0$; е) $-\sqrt{k^2}$, если $k \leqslant 0$;

в) $\sqrt{25t^2}$, если $t < 0$; ж) $-\sqrt{4(-h)^2}$, если $h \geq 0$;

г) $-2\sqrt{c^2}$, если $c > 0$; з) $\sqrt{(-j)^2}+\sqrt{(-j)^4}$, если $j > 0$.

16 Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^4}$, если $x \geqslant 0$; в) $\sqrt{u^8}$, если $u \leqslant 0$;

б) $\sqrt{y^6}$, если $y \leqslant 0$; г) $\sqrt{t^{14}}$, если $t \geqslant 0$.

17 Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2-2x+1}$; в) $\sqrt{m^4+4m^2+4}$;

б) $\sqrt{9h^2-6hk+k^2}$; г) $\sqrt{4p^2q^2+12pq+9}$.

П

18 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{6{,}4\cdot10^3}$; в) $\sqrt{3{,}6\cdot10^{-3}}$;

б) $\sqrt{8{,}1\cdot10^7}$; г) $\sqrt{4{,}9\cdot10^{-5}}$.

19 Упростите:

а) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; в) $\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2}$;

б) $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$; г) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}$.

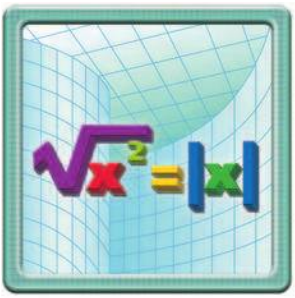
20 Запишите в виде произведения или частного радикалов:

а) $\sqrt{(-7)\cdot(-5)}$; б) $\sqrt{-7a}$; в) $\sqrt{-\frac{2}{c}}$; г) $\sqrt{\frac{m}{-11}}$.

М

21 Всегда ли можно записать радикал из произведения в виде произведения радикалов? Если нет, объясните почему. Если да, продолжите запись формулы и докажите её: $\sqrt{ab}=\sqrt{\ldots}\cdot\sqrt{\ldots}$.

3.5 Преобразование выражений, содержащих арифметические квадратные корни



Знакомимся с новой темой

В предыдущем параграфе мы изучили основные формулы, используемые при преобразованиях числовых и алгебраических выражений, содержащих арифметические квадратные корни. В данном параграфе, основываясь на этих формулах, а также на уже известных нам методах тождественных преобразований, мы рассмотрим некоторые полезные приёмы работы с выражениями, содержащими арифметические квадратные корни. Поскольку выражение «арифметический квадратный корень» довольно длинное, мы будем иногда для краткости говорить «квадратный корень», или просто «корень», или «радикал».

I. Вынесение множителя за знак радикала и внесение множителя под знак радикала.

Начнём с простого примера. Как вы знаете, число $\sqrt{12}$ является иррациональным, поскольку 12 не является квадратом натурального числа. Оказывается, что $\sqrt{12}$ можно записать и в другом виде, во многих случаях более простом и удобном, чем данный.

Попробуем представить подкоренное выражение в виде произведения двух натуральных чисел и применить соответствующую формулу.

Это можно сделать так: $\sqrt{12}=\sqrt{6\cdot 2}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}$. Никакого существенного упрощения не произошло.

Но это можно сделать и так: $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. Здесь один из двух возникших после применения формулы корней удалось извлечь, и преобразуемое выражение приобрело более простой вид.

Именно это второе преобразование называется *вынесением множителя за знак радикала* (или *из-под знака радикала*). Множитель 4, стоявший под знаком радикала, преобразовался в множитель 2, стоящий за знаком радикала. Ясно, что за знак радикала можно вынести множитель, являющийся *полным квадратом*, т. е. квадратом рационального числа или рационального выражения. Это преобразование называют также иногда *частичным извлечением корня*.

Прочитав строчку с выполненными выше преобразованиями справа налево, можно догадаться, в чём заключается преобразование, называемое *внесением множителя под знак радикала*. Если имеется произведение положительного числа и арифметического квадратного корня, то, записав это положительное число в виде арифметического квадратного корня из его квадрата, можно заменить произведение корней на корень из произведения их подкоренных выражений.

Например, $5\sqrt{2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{50}$.

Ещё раз обращаем ваше внимание: здесь важно, чтобы множитель, вносимый под знак радикала, был неотрицательным. Отрицательный множитель под знак радикала внести нельзя! Обычно в такой ситуации отрицательное число записывают в виде произведения -1 и его модуля (положительного множителя), после чего множитель -1 (или попросту знак «$-$») оставляют вне знака радикала, а положительный множитель вносят под знак радикала.

Рассмотрим пример:

$-3\sqrt{7}=-1\cdot 3\sqrt{7}=-1\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}=-\sqrt{9\cdot 7}=-\sqrt{63}$.

Вынесение множителя за знак радикала и внесение множителя под знак радикала применяется при решении многих задач.

Упростим, например, выражение: $\sqrt{32}-2\sqrt{50}+\sqrt{98}$.

Раскладывая подкоренные выражения на множители, один из которых равен 2, получим:

$\sqrt{32}-2\sqrt{50}+\sqrt{98}=\sqrt{16\cdot 2}-2\sqrt{25\cdot 2}+\sqrt{49\cdot 2}=$
$=4\sqrt{2}-2\cdot 5\sqrt{2}+7\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot(4-10+7)=\sqrt{2}$.

На предпоследнем шаге мы вынесли за скобки общий множитель $\sqrt{2}$.

Рассмотрим теперь примеры на вынесение множителя за знак радикала и внесение множителя под знак радикала с буквенными выражениями.

Упростим, к примеру, $\sqrt{x^3}$. Прежде всего заметим, что допустимые значения переменной x в этом выражении определяются из условия $x^3\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 0$ (вы знаете из 7-го класса, что нечётная натуральная степень действительного числа неотрицательна в том и только в том случае, когда само это число неотрицательно).

Преобразуем корень так, чтобы подкоренное выражение представляло собой произведение двух множителей: $\sqrt{x^3}=\sqrt{x^2\cdot x}$. Теперь внимание! Важный момент. Вы знаете из предыдущего параграфа, что формулу $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ можно применять только при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Есть ли у нас информация о неотрицательности каждого из сомножителей, стоящих под знаком радикала в выражении $\sqrt{x^2 \cdot x}$? Да, такая информация есть — мы установили, что $x \geqslant 0$, кроме того, всегда $x^2 \geqslant 0$. Применяя указанную формулу, получаем: $\sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = |x|\sqrt{x} = x\sqrt{x}$. Мы воспользовались формулой $\sqrt{x^2} = |x|$, а также тем, что $|x| = x$ при $x \geqslant 0$.

Итак, получили, что $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$.

Как видите, существенную роль в преобразованиях играл тот факт, что область допустимых значений переменной задавалась условием $x \geqslant 0$.

Рассмотрим ещё один пример. Попробуем упростить $\sqrt{x^2 y}$.

Записав $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2 \cdot y}$, задумаемся, есть ли у нас информация о неотрицательности каждого из сомножителей, стоящих под знаком радикала. Мы знаем, что область допустимых значений задаётся условием $x^2 y \geqslant 0$. Но ведь это может быть, например, при $x = 0$; $y = -1$. Таким образом, y может быть отрицательным, и нельзя вместо $\sqrt{x^2 \cdot y}$ писать $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y}$!

Возникает естественный вопрос: «А что же делать?»

Аккуратное решение следующее.

Рассмотрим два случая.

1) Если $x = 0$, то при любом y имеем: $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{0^2 \cdot y} = \sqrt{0} = 0$.

2) Если $x \neq 0$, то $x^2 > 0$, и тогда из того, что $x^2 y \geqslant 0$, следует, что $y \geqslant 0$, и можно записать: $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2 \cdot y} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$.

Ответ: 0 при $x = 0$, $|x|\sqrt{y}$ при $x \neq 0$.

Ответ можно записать также в виде: $\sqrt{x^2 y} = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ |x|\sqrt{y} & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$

Таким образом, вы видите, что безобидная на первый взгляд задачка оказалась весьма коварной. Вообще, преобразования выражений, содержащих радикалы, требуют очень большой аккуратности, особенно это касается обоснованности каждого выполняемого шага.

Рассмотрим очень похожий пример: упростим выражение $\sqrt{\dfrac{y}{x^2}}$.

Здесь область допустимых значений задаётся двумя условиями: $\dfrac{y}{x^2} \geqslant 0$ и $x \neq 0$. Из этих двух условий следует, что $y \geqslant 0$ и $x^2 > 0$, значит, можно применять формулу для арифметического квадратного корня из частного: $\sqrt{\dfrac{y}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{\sqrt{y}}{|x|}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{y}}{|x|}$.

Напоследок рассмотрим внесение буквенного множителя под знак радикала. Преобразуем выражение $x\sqrt{y}$.

Допустимые значения переменных в этом выражении задаются условием $y \geqslant 0$. Что касается переменной x, то она может быть любым действительным числом.

Мы немного выше вносили под знак радикала числовые множители и помним, что для положительных чисел и отрицательных чисел это делается совершенно по-разному. А здесь нам нужно внести множитель x, знак которого может быть любым. Как быть?

Необходимо рассмотреть отдельно два случая:

1) Если $x \geqslant 0$, то $x = \sqrt{x^2}$ и $x\sqrt{y} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x^2 y}$.

2) Если $x < 0$, то $x = -\sqrt{x^2}$ и $x\sqrt{y} = -\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = -\sqrt{x^2 y}$.

Окончательно имеем: $x\sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{x^2 y} & \text{при } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{x^2 y} & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Как видите, ответ в этом примере задаётся двумя разными формулами в зависимости от значения переменной x.

II. Использование формул сокращённого умножения в выражениях, содержащих радикалы.

Занимаясь тождественными преобразованиями рациональных выражений и придя в какой-то момент к выражению вроде $x^2 - 9$, мы имели возможность разложить его на множители с помощью формулы разности квадратов: $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$, и часто этой возможностью пользовались. Приходя же к выражению вроде $x^2 - 10$, мы такой возможности не имели, так как число 10 для нас «не было» квадратом. Теперь, зная, что $10 = \left(\sqrt{10}\right)^2$, мы можем при желании продолжить преобразования дальше: $x^2 - 10 = x^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2 = \left(x - \sqrt{10}\right)\left(x + \sqrt{10}\right)$.

Рассмотрим ещё несколько примеров использования формул сокращённого умножения в случае выражений с корнями. Поговорим, например, о формуле квадрата суммы.

Переход от свёрнутого вида этой формулы к развёрнутому несложен:

$\left(\sqrt{y} + 3\right)^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{y} \cdot 3 + 3^2 = y + 6\sqrt{y} + 9;$

$\left(z + \sqrt{3}\right)^2 = z^2 + 2z \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = z^2 + 2\sqrt{3}z + 3.$

Обратное преобразование заметно сложнее. Нужно приобрести достаточный опыт, чтобы научиться замечать в выражении $z^2 + 2\sqrt{3}z + 3$ развёрнутый вид квадрата суммы. Это станет ещё труднее, если переписать это выражение в виде $z^2 + \sqrt{12}z + 3$ (вместо $2\sqrt{3}$ мы записали равный ему корень $\sqrt{12}$).

Если под знаком радикала стоит буквенное выражение, то иногда полезно выполнить замену этого радикала на новую переменную.

Рассмотрим, например, выражение $4m+12\sqrt{m}+9$. Если выполнить замену $\sqrt{m}=t$, то $t\geqslant 0$, $m=t^2$, и выражение перепишется в виде:

$4m+12\sqrt{m}+9=4t^2+12t+9$, а здесь нам уже гораздо привычнее увидеть квадрат суммы $(2t+3)^2$.

Таким образом, $m+12\sqrt{m}+9=\left(2\sqrt{m}+3\right)^2$.

Рассмотрим ещё один пример. Преобразуем выражение $a+2\sqrt{a-1}$.

Замена $\sqrt{a-1}=b$ приводит к тому, что $b\geqslant 0$ и $a-1=b^2$, т. е. $a=b^2+1$, и тогда:

$a+2\sqrt{a-1}=b^2+1+2b=(b+1)^2=\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2$.

III. Освобождение от иррациональности в знаменателе.

Начнём с простого примера. Рассмотрим дробь $\frac{5\sqrt{2}}{7\sqrt{3}}$. Воспользуемся основным свойством дроби и умножим её числитель и знаменатель на $\sqrt{3}$. Получим:

$$\frac{5\sqrt{2}}{7\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{7\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2\cdot 3}}{7\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{6}}{21}.$$

Нам удалось преобразовать исходную дробь в равную ей дробь, знаменатель которой не содержит радикалов.

Принято говорить, что мы *освободились от радикалов в знаменателе*, а поскольку выражения, содержащие радикалы, называют ещё *иррациональными выражениями*, то говорят также, что мы *освободились от иррациональности в знаменателе*. Часто вместо «освободились» говорят также «избавились».

Рассмотрим ещё одну дробь: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ и попробуем избавиться от радикалов в знаменателе. Как подобрать множитель, произведение которого с $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ не содержало бы радикалов?

Поскольку этот вопрос будет возникать неоднократно, важно научиться на него отвечать и запомнить этот ответ. Здесь нам поможет формула разности квадратов, записанная в виде:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b.$$

Видно, что произведение разности радикалов на их сумму оказалось выражением, не содержащим радикалов. Иррациональные выражения $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ часто называют *сопряжёнными* друг другу иррациональностями.

Вернёмся к дроби $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ и умножим её числитель и знаменатель на иррациональность, сопряжённую знаменателю:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{7-3}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{4}.$$

Решим без комментариев ещё один пример:

$$\frac{\sqrt{x}}{a\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}\cdot\left(a\sqrt{x}+2\right)}{\left(a\sqrt{x}-2\right)\left(a\sqrt{x}+2\right)}=\frac{ax+2\sqrt{x}}{a^2x-4}.$$

Здесь промежуточные шаги мы выполняли не так подробно, как в предыдущем примере.

В заключение обсудим вопрос, почему мы избавлялись от иррациональности именно в знаменателе, а не в числителе дроби, — ведь это тоже можно было бы делать абсолютно аналогично. Скажем, если взять дробь из самого первого рассмотренного примера, то избавиться в ней от иррациональности в числителе можно так:

$$\frac{5\sqrt{2}}{7\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{7\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\left(\sqrt{2}\right)^2}{7\sqrt{3\cdot 2}}=\frac{10}{7\sqrt{6}}.$$

Причина здесь в том, что при нахождении алгебраической суммы дробей нам приходится находить их общий знаменатель, а делать это почти всегда гораздо легче, если в знаменателях дробей нет радикалов. Что касается освобождения от иррациональности в числителе, то оно тоже с успехом используется при решении некоторых задач, в чём вы ещё убедитесь.

Развиваем умения

Н

1 Расскажите, приводя примеры.

а) Какой множитель можно вынести из-под знака арифметического квадратного корня и как это сделать?

б) Что называется частичным извлечением квадратного корня?

2 Расскажите, приводя примеры.

а) Как внести положительный множитель под знак арифметического квадратного корня?

б) Можно ли внести отрицательный множитель под знак арифметического квадратного корня?

в) Как можно преобразовать произведение отрицательного множителя и арифметического квадратного корня?

г) Как можно преобразовать выражение $x\sqrt{y}$?

3 Расскажите, приводя примеры.

а) Что значит освободиться от иррациональности в знаменателе?

б) Как освободиться от иррациональности в знаменателе, если знаменатель представляет собой произведение рационального выражения и арифметического квадратного корня?
в) Как освободиться от иррациональности в знаменателе, если знаменатель представляет собой сумму натурального числа и «неизвлекаемого» арифметического квадратного корня из натурального числа?
г) Как освободиться от иррациональности в знаменателе, если знаменатель представляет собой сумму двух радикалов с рациональными подкоренными выражениями?
д) Как освободиться от иррациональности в знаменателе, если знаменатель представляет собой разность двух радикалов с рациональными подкоренными выражениями?

4 Вынесите множитель за знак радикала:

а) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{175}$; д) $\sqrt{52}$; ж) $\sqrt{\frac{45}{4}}$;

б) $\sqrt{40}$; г) $\sqrt{68}$; е) $\sqrt{150}$; з) $\sqrt{\frac{40}{98}}$.

5 Внесите множитель под знак радикала:

а) $4\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{46}$; д) $-5\sqrt{\frac{2}{15}}$; ж) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{13}}$;

б) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; г) $-7\sqrt{2}$; е) $6\sqrt{\frac{7}{18}}$; з) $\frac{9}{5}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6 Упростите выражение:

а) $3\sqrt{6}+4\sqrt{6}$; в) $7\sqrt{2}+6\sqrt{2}-8\sqrt{2}$;

б) $8\sqrt{3}-5\sqrt{3}$; г) $\sqrt{11}+2\sqrt{11}+7\sqrt{11}$.

Н

7 Упростите выражение:

а) $-5\sqrt{a}+3\sqrt{a}$; в) $7\sqrt{c}+6\sqrt{c}-8\sqrt{m}$;

б) $15\sqrt{z}-9\sqrt{z}$; г) $\sqrt{p}+2\sqrt{q}-7\sqrt{p}+3\sqrt{q}$.

8 Упростите выражение:

а) $\sqrt{45}-4\sqrt{20}+\sqrt{80}$; д) $\sqrt{12}-\sqrt{363}+\sqrt{243}$;

б) $\sqrt{50}-\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{18}$; е) $5\sqrt{242}-4\sqrt{8}-4\sqrt{200}$;

в) $\sqrt{63}+\sqrt{112}+\sqrt{175}$; ж) $\sqrt{153}+\sqrt{68}+3\sqrt{272}$;

г) $-\sqrt{44}+\sqrt{1331}-\sqrt{99}$; з) $\sqrt{245}+\frac{6}{5}\sqrt{125}-\sqrt{320}$.

9 Упростите выражение:

а) $8\sqrt{0{,}1}-2\sqrt{0{,}4}-0{,}5\sqrt{40}$;

б) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{50}{3}}-\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{10}-\sqrt{\dfrac{605}{8}}+\dfrac{99}{4}\sqrt{\dfrac{10}{121}}$;

г) $\sqrt{9{,}9}-\sqrt{4{,}4}-\sqrt{1{,}1}$;

д) $\dfrac{1}{11}\sqrt{0{,}847}-\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{63}{250}}+\dfrac{1}{7}\sqrt{0{,}343}$;

е) $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{81}{2}}+\dfrac{1}{4}\sqrt{72}+\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{225}{2}}$;

ж) $\sqrt{\dfrac{343}{8}}-2\sqrt{\dfrac{175}{8}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{63}{2}}$;

з) $\sqrt{11}+\sqrt{\dfrac{144}{11}}-\dfrac{12}{13}\sqrt{\dfrac{169}{11}}$.

10 Внесите множитель под знак радикала:

а) $a\sqrt{14}$, где $a\geqslant 0$;

б) $b\sqrt{5}$, где $b<0$;

в) $c^2\sqrt{2}$;

г) $-d^4\sqrt{2}$;

д) $x^3\sqrt{14}$, где $x\geqslant 0$;

е) $-y^5\sqrt{21}$, где $y<0$.

11 Освободитесь от радикала в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$;

б) $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$;

в) $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$;

г) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$;

д) $\dfrac{2}{\sqrt{0{,}4}}$;

е) $\dfrac{0{,}9}{\sqrt{0{,}3}}$;

ж) $\dfrac{7\sqrt{2}}{\sqrt{14}}$;

з) $\dfrac{12\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

12 Освободитесь от радикала в знаменателе:

а) $\dfrac{5}{\sqrt{c}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2d}}$;

в) $\dfrac{p\sqrt{2}}{\sqrt{q}}$;

г) $\dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt{5z}}$;

д) $\dfrac{t^2-1}{(t-1)\sqrt{t+1}}$;

е) $\dfrac{k}{\sqrt{(2k)^3}}$;

ж) $\dfrac{1}{\sqrt{3m-2n}}$;

з) $\dfrac{m+n}{\sqrt{m-n}}$.

13 Запишите иррациональность, сопряжённую данной:

а) $\sqrt{11}+3$;

б) $2-\sqrt{z}$;

в) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$;

г) $\sqrt{11}+\sqrt{12}$;

д) $a\sqrt{x}+\sqrt{y}$;

е) $\sqrt{h+p}-\sqrt{h-p}$.

14 Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$;

б) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$;

г) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{4}}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}$;

д) $\dfrac{n-1}{\sqrt{n}-1}$;

е) $\dfrac{s}{\sqrt{2s}+\sqrt{s}}$;

ж) $\dfrac{10}{\sqrt{12}+\sqrt{2}}$;

з) $\dfrac{60}{\sqrt{2}-\sqrt{22}}$.

15 Сократите дробь:

а) $\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$; д) $\frac{\sqrt{36}-\sqrt{33}}{\sqrt{24}-\sqrt{22}}$; ж) $\frac{\sqrt{90}-\sqrt{18}}{\sqrt{70}-\sqrt{14}}$;

б) $\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{10}}{10\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{100}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$; е) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{21}+\sqrt{14}}$; з) $\frac{\sqrt{98}+\sqrt{182}}{\sqrt{63}+\sqrt{117}}$.

16 Сократите дробь:

а) $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$; д) $\frac{2q}{\sqrt{p+q}-\sqrt{p-q}}$;

б) $\frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$; е) $\frac{\sqrt{mn}}{m\sqrt{n}+n\sqrt{m}}$;

в) $\frac{5\sqrt{a}-2\sqrt{b}}{25a-4b}$; ж) $\frac{7m+n+2\sqrt{7mn}}{\sqrt{7m}+\sqrt{n}}$;

г) $\frac{\sqrt{s^3}+\sqrt{s^4}}{s}$; з) $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{1+x-\sqrt{2x+x^2}}$.

17 Упростите выражение:

а) $\left(\frac{\sqrt{m}}{m-n}-\frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right):\frac{\sqrt{m}}{n-m}$; д) $\frac{\sqrt{m^4}+\sqrt{m^3}+\sqrt{m^2}+\sqrt{m}}{\sqrt{m}+m}$;

б) $\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}$; е) $\left(\frac{\sqrt{i}+2\sqrt{j}}{2\sqrt{i}}-\frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{i}+4\sqrt{j}}\right)\cdot\frac{i+2\sqrt{ji}}{j+\sqrt{ij}}$;

в) $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{z}-1\right)^2}{z-1}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}}$; ж) $\left(\frac{h+\sqrt{h}}{h}+\frac{h-\sqrt{h}}{h+1}\right):\frac{1+\sqrt{h}+2\sqrt{h^3}}{\sqrt{h}+\sqrt{h^3}}$;

г) $\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{h+1}+\sqrt{1-h}}$; з) $k\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)$.

П

18 Вынесите множитель из-под знака радикала:

а) $\sqrt{5a^2}$, где $a \geqslant 0$; в) $\sqrt{3c^4}$; д) $\sqrt{\frac{m}{n^2}}$, где $n \geqslant 0$;

б) $\sqrt{2b^6}$, где $b<0$; г) $-3\sqrt{7d^3}$; е) $-\sqrt{\frac{z^5}{y^2}}$, где $y<0$.

19 а) Найдите ошибку в преобразованиях:

$\sqrt{x^4y}=\sqrt{x^4\cdot y}=\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{y}=|x^2|\sqrt{y}=x^2\sqrt{y}$. Ответ: $x^2\sqrt{y}$.

б) Решите задачу правильно.

20 Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$; в) $\dfrac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$;

б) $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{3+4\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{11}+2\sqrt{3}}$.

21 Найдите значение выражений при указанных значениях переменных:

а) $2a^2-5ab+2b^2$ при $a=\sqrt{6}+\sqrt{5}$, $b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$;

б) $3x^2+4xy-3y^2$ при $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

в) $u^2+2uv+3v^2$ при $u=\sqrt{22}+\sqrt{88}$, $v=\sqrt{22}-\sqrt{88}$;

г) m^2+mn+n^2 при $m=\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$, $n=\dfrac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$.

22 Упростите выражение:

а) $\dfrac{m+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\left(\dfrac{m+n}{\sqrt{mn}}+\dfrac{n}{m-\sqrt{mn}}-\dfrac{m}{\sqrt{nm}+n}\right)$;

б) $\dfrac{(u+v)\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)\left(u-\sqrt{u}\sqrt{v}+v\right)\left(u+\sqrt{u}\sqrt{v}+v\right)}{u^3-v^3}$;

в) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

г) $\dfrac{\sqrt{z+\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{z+2}}}{\sqrt{z+\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{z+2}}}+\dfrac{\sqrt{z+\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{z+2}}}{\sqrt{z+\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{z+2}}}$.

М

23 Упростите выражение:

а) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$;

б) $\dfrac{10\sqrt{10}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\dfrac{25+50\sqrt{2}+20\sqrt{5}-8\sqrt{10}}{3}$;

в) $\dfrac{24\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-\sqrt{7}}+\dfrac{24\sqrt{6}}{2\sqrt{6}+\sqrt{7}}-\dfrac{574\sqrt{6}+861\sqrt{7}}{34\sqrt{6}+51\sqrt{7}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}+\dfrac{335+240\sqrt{2}}{13+10\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{10}}$.

24 Упростите выражение:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{16-2\sqrt{15}}$; д) $\sqrt{25+4\sqrt{6}}$;

б) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$; е) $\sqrt{14+4\sqrt{6}}$.

25 Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)+2\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)+\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$;

в) $2\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}+3\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+5\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$;

г) $\dfrac{9+4\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}+\dfrac{7}{3}+2\sqrt{\dfrac{2}{3}}-2\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

М

26 Докажите, что любая натуральная степень выражения $\sqrt{2}-1$ может быть записана в виде разности арифметических квадратных корней из двух последовательных натуральных чисел. Например:

$\left(\sqrt{2}-1\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$,

$\left(\sqrt{2}-1\right)^3=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=$

$=3\sqrt{2}-3-4+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}-7=\sqrt{50}-\sqrt{49}$ и т. д.

Исследовательский проект «Приближённое вычисление квадратного корня»

Ещё в Древнем Вавилоне более 4 тысяч лет назад был известен метод приближённого вычисления квадратного корня из натуральных чисел. Для натурального x находили наибольший полный квадрат (т. е. квадрат натурального числа), не превосходящий x. Другими словами, число x записывали в виде $x = y^2 + z$, где y и z — натуральные числа, причём y — наибольшее из всех возможных. После этого применяли приближённую формулу:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2 + z} \approx y + \frac{z}{2y}.$$

Например, $\sqrt{245} = \sqrt{225 + 20} = \sqrt{15^2 + 20} \approx 15 + \frac{20}{2 \cdot 15} = 15\frac{2}{3}$.

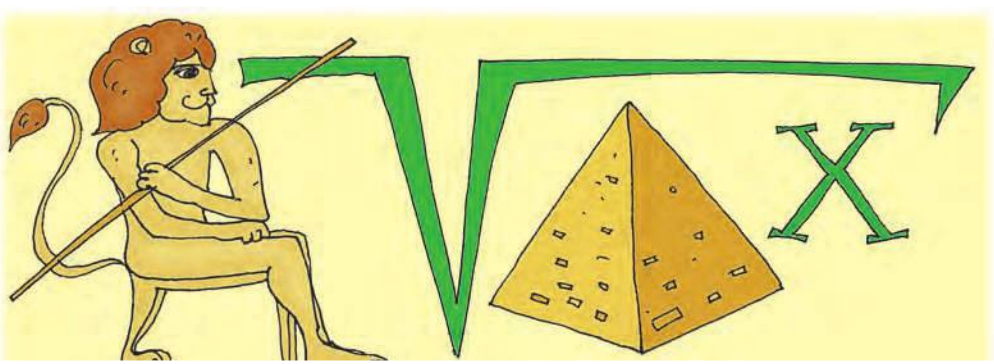
1) Выясните, на чём основывается древневавилонская формула приближённого вычисления квадратного корня.
2) Даёт ли эта формула приближённое значение квадратного корня с недостатком или с избытком (или иногда с недостатком, а иногда с избытком)?
3) Попробуйте оценить погрешность этой формулы.

Рассмотрим другую формулу приближённого вычисления квадратного корня. Запишем число x в виде $x = y^2 - z$, где y и z — натуральные числа, причём y — наименьшее из всех возможных. После этого применим формулу:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2 - z} \approx y - \frac{z}{2y}.$$

Например, $\sqrt{245} = \sqrt{256 - 11} = \sqrt{16^2 - 11} \approx 16 - \frac{11}{2 \cdot 16} = 15\frac{21}{32}$.

4) Ответьте на те же вопросы для второй формулы.
Выясните, в каких случаях какая из формул даёт более точный результат.



ГЛАВА IV КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1 Квадратные уравнения. Примеры решения квадратных уравнений

Вспоминаем то, что знаем

- Что можно сказать о сомножителях, произведение которых равно нулю?
- Запишите формулу разности квадратов. С помощью этой формулы разложите на множители выражения x^2-36; x^2-6.
- В чём заключается метод группировки при разложении на множители? Разложите на множители многочлен x^2+8x-9 методом группировки.

Открываем новые знания

- Решите уравнение $(2x-7)(x+1)=0$.
- Решите уравнение $x^2-36=0$.
- Решите уравнение $x^2-6=0$.
- Решите уравнение $x^2+8x-9=0$.

?! Как решать уравнение методом разложения на множители его левой части при нулевой правой части?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Квадратным уравнением с одним неизвестным называют уравнение, левая часть которого представляет собой многочлен второй степени с одним неизвестным, а правая часть равна нулю. Такие уравнения ещё называют *уравнениями второй степени с одним неизвестным.*

Общий вид квадратного уравнения с одним неизвестным:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Здесь a, b и c — некоторые числа, которые называются коэффициентами уравнения. Поскольку степень многочлена, стоящего в левой части уравнения, вторая, то значение a не равно нулю. Если коэффициент a равен единице, то квадратное уравнение называют *приведённым*.

В таблице представлены примеры квадратных уравнений с одним неизвестным. Первое из уравнений является приведённым.

Уравнение	Коэффициенты
$x^2+4x=0$ $3x^2+5=0$ $2x^2-4x+2=0$ $-2x^2-x+3=0$	$a=1,\ b=4,\ c=0$ $a=3,\ b=0,\ c=5$ $a=2,\ b=-4,\ c=2$ $a=-2,\ b=-1,\ c=3$

Как мы уже видели, решение уравнений обычно сводится к следующему. Данное уравнение заменяем другим, равносильным ему уравнением, но более простым. Полученное уравнение заменяем другим, ещё более простым, и так до тех пор, пока не получим уравнение, которое умеем решать.

Этот приём решения уравнений мы использовали в 7-м классе. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решим уравнение

$$(x+3)(2x+4)=0.$$

Пусть x — корень уравнения, т. е. число, при котором равенство верно.

Произведение равно нулю. Следовательно, хотя бы один из сомножителей равен нулю. Возможно два случая:

1) $x+3=0$, тогда $x=-3$;

2) $2x+4=0$, тогда $2x=-4$, $x=-2$.

Ответ: -3, -2.

Если раскрыть скобки в левой части уравнения и привести подобные, то получим равносильное уравнение:

$$2x^2+10x+12=0.$$

Возникает вопрос: нельзя ли левую часть квадратного уравнения путём тождественных преобразований преобразовать в произведение линейных множителей, а затем воспользоваться приёмом, разобранным в примере 1?

Оказывается, в большинстве случаев это возможно. Особенно полезен этот приём в случае *неполных квадратных уравнений*, т. е. таких, где хотя бы один из коэффициентов b или c равен 0.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^2+x=0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x(x+1)=0.$$

Рассуждая, как в примере 1, получим ответ: 0, −1.

При разложении на множители полезно использовать формулы сокращённого умножения.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^2-7=0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)=0.$$

Рассуждая, как в предыдущих примерах, получим ответ: $-\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^2+4x+4=0.$$

Представим левую часть уравнения в виде:

$$(x+2)^2=0.$$

Получили два одинаковых множителя, поэтому корень единственный.
Ответ: -2.

Пример 5. Решим уравнение

$$x^2+2x-3=0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители методом группировки:

$$x^2-x+3x-3=0;$$

$$x(x-1)+3(x-1)=0;$$

$$(x+3)(x-1)=0.$$

Ответ: 1, -3.

Развиваем умения

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.
а) Что называется квадратным уравнением с одним неизвестным?
б) Что называется неполным квадратным уравнением?

2 Из предложенных уравнений выберите квадратные:

а) $2x^2-9=0$; д) $x^2-0\cdot x+3=0$;
б) $2x^3+3=0$; е) $x^2+x=5$;
в) $2x^2+3=x+7$; ж) $1+3x=61$;
г) $0\cdot x^2-2x+1=0$; з) $x^2+4x+3=0$.

3 Укажите коэффициенты квадратного уравнения:

а) $2x^2-x-9=0$; д) $3x^2+3x+1=0$;
б) $x^2+3x=0$; е) $x^2+x-5=0$;
в) $2x^2=0$; ж) $3x^2-6x=0$;
г) $4x^2-9=0$; з) $2x^2-x+1=0$.

4 Решите уравнение:

а) $(x-1)(x-2)=0$;
б) $(x+9)(x-3)=0$;
в) $(x-3)(x+4)=0$;
г) $(x+9)(x+2)=0$;
д) $(2x-1)(5x-2)=0$;
е) $(4x-1)(x+2)=0$;
ж) $(3x+3)(2x-1)=0$;
з) $(3x+2)(2x+1)=0$.

Н

5 Решите неполное квадратное уравнение:

а) $x^2-2x=0$;
б) $2x^2-x=0$;
в) $4x^2+3x=0$;
г) $-x^2-3x=0$;
д) $x^2-16=0$;
е) $x^2-3=0$;
ж) $4x^2-1=0$;
з) $x^2=0$.

6 Решите уравнение:

а) $x^2=x$;
б) $x^2=-4x$;
в) $5x^2=12x$;
г) $6x^2=-15x$;
д) $x^2=4$;
е) $x^2=8$;
ж) $5x^2=1$;
з) $2x^2=4$.

7 Решите уравнение:

а) $x^2-2x+1=0$;
б) $x^2-x+\frac{1}{4}=0$;
в) $x^2+2x+1=0$;
г) $-x^2-4x-4=0$;
д) $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$;
е) $4x^2-2x+\frac{1}{4}=0$;
ж) $x^2+8x+4=0$;
з) $-\frac{1}{4}x^2-x-1=0$.

П

8 Найдите корни уравнения:

а) $5x^3=2x^2$;
б) $x^4=-3x^3$;
в) $3x^2=2x^3$;
г) $-6x^2=3x$;
д) $x^4=16x^2$;
е) $x^3=9x$;
ж) $4x^3=x$;
з) $x^4=16$.

9 При каких значениях C уравнение $5x^2-x+C=0$ имеет корень 3?

10 При каких значениях b уравнение $3x^2 - bx + 1 = 0$ имеет корень -1?

11 При каких значениях a уравнение $ax^2 - 4x + 4 = 0$ имеет корень 2?

12 При каких значениях m уравнения $x^2 - 3x = 0$ и $x^2 + mx - 4 = 0$ имеют общий корень?

13 Решите уравнение:

а) $x^2 + 5x + 3 = 6x + 3$;
б) $x^2 - 7x + 8 = 8 - 2x$;
в) $-6x^2 + 6x - 5 = 6x - 5$;
г) $-x^2 - 2x + 3 = 3 - 7x$;
д) $x^2 + 5x + 3 = 5x - 7$;
е) $x^2 - 2x - 1 = 8 - 2x$;
ж) $2x^2 + x - 3 = 2x - 3$;
з) $x^2 + x - 6 = x$.

М

14 Решите уравнение:

а) $x^2 - 2x + 3 = 0$;
б) $x^2 - x - 3 = 0$;
в) $-x^2 + 6x - 5 = 0$;
г) $-x^2 - 2x + 3 = 0$;
д) $2x^2 - x - 1 = 0$;
е) $3x^2 - 2x - 1 = 0$;
ж) $2x^2 + x - 3 = 0$;
з) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

15 Придумайте квадратное уравнение, имеющее корни:

а) 2 и 1; б) -2 и 1; в) $-0{,}5$ и 1; г) $-0{,}5$ и $0{,}8$.

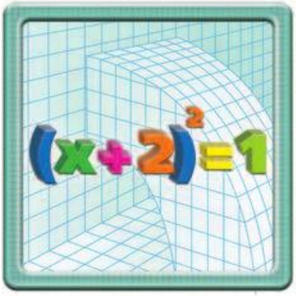
16 Решите уравнение:

а) $(x-1)^2 = x - 1$;
б) $2(x-1)^2 - 3(x-1) = 0$;
в) $(2x-2)^2 = x - 1$;
г) $-(x-1)^2 = 4x - 4$.

17 Решите уравнение:

а) $\dfrac{-x^2 - 3x}{x} = 0$;
б) $\dfrac{-x^2 - 3x}{x+3} = 0$;
в) $\dfrac{x^2 - 9}{x} = 0$;
г) $\dfrac{x^2 - 9}{x+3} = 0$.

4.2 Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата



Вспоминаем то, что знаем

- Какое преобразование называется выделением полного квадрата в многочлене второй степени с одной переменной?
- Выделите полный квадрат в многочлене $x^2-8x+12$.

Открываем новые знания

- Решите уравнение $x^2-8x+12=0$.

?! Как решать квадратное уравнение, предварительно выделив в его левой части полный квадрат?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Будем решать квадратные уравнения *методом выделения полного квадрата*. Это преобразование мы изучали в 7-м классе.

Поясним суть метода на примерах.

Пример 1. Решим уравнение

$$x^2+4x+3=0.$$

В левой части уравнения выделим полный квадрат:

$$x^2+4x+3=\left(x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2\right)-2^2+3=(x+2)^2-1.$$

Получим уравнение:

$$(x+2)^2-1=0;$$
$$(x+2)^2=1;$$
$$x+2=1 \text{ или } x+2=-1;$$
$$x_1=-1,\ x_2=-3.$$

Ответ: -1, -3.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^2-2x-2=0.$$

Выделим полный квадрат:

$$x^2-2x-2=\left(x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2\right)-1^2-2=(x-1)^2-3.$$

Получим уравнение:

$$(x-1)^2-3=0;$$
$$(x-1)^2=3;$$
$$x-1=\sqrt{3} \text{ или } x-1=-\sqrt{3};$$
$$x_1=1+\sqrt{3},\ x_2=1-\sqrt{3}.$$

Ответ: $1\pm\sqrt{3}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^2+6x+10=0.$$

Выделим полный квадрат:

$$x^2+6x+10=(x+3)^2+1.$$

Получим уравнение:

$$(x+3)^2=-1.$$

Полученное равенство невозможно.
Ответ: корней нет.

Пример 4. Решим уравнение

$$4x^2+6x+1=0.$$

Умножим обе части уравнения на 4:

$$16x^2+24x+4=0.$$

Выделим полный квадрат:

$$16x^2+24x+4=(4x)^2+2\cdot4x\cdot3+9-5=(4x+3)^2-5.$$

Получим уравнение:

$$(4x+3)^2-5=0;$$
$$(4x+3)^2=5;$$
$$4x+3=\pm\sqrt{5};$$
$$4x=-3\pm\sqrt{5};$$
$$x=\frac{-3+\sqrt{5}}{4} \text{ или } x=\frac{-3-\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Развиваем умения

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Что называется приведённым квадратным уравнением?

б) В чём состоит метод выделения полного квадрата?

2 Подберите числа b и c так, чтобы данное выражение стало полным квадратом:

а) x^2+2x+c;

б) x^2-4x+c;

в) x^2+3x+c;

г) x^2-6x+c;

д) x^2+bx+9;

е) $x^2-bx+25$;

ж) x^2+bx+5;

з) x^2-bx+7.

3 Решите уравнение:

а) $x^2=81$;

б) $x^2=-16$;

в) $16x^2=81$;

г) $5x^2=-35=0$;

д) $(x-4)^2=1$;

е) $-(x-3)^2=-9$;

ж) $(2x+5)^2=25$;

з) $-(2x+1)^2=4$.

4 Решите уравнение методом выделения полного квадрата:

а) $x^2-4x=0$;

б) $x^2+2x=0$;

в) $x^2-x=0$;

г) $x^2+3x=0$;

д) $x^2-4x=-3$;

е) $x^2+2x=-2$;

ж) $x^2-x=0{,}75$;

з) $x^2+3x=1{,}75$.

Н

5 Решите уравнение:

а) $x^2-4x+5=0$;

б) $x^2+2x-3=0$;

в) $x^2+6x+8=0$;

г) $x^2-2x-15=0$;

д) $x^2+3x-4=0$;

е) $x^2-x-2=0$;

ж) $x^2+x-6=0$;

з) $x^2+5x-6=0$.

6 Решите уравнение:

а) $x^2-14x+48=0$;

б) $x^2+20x+100=0$;

в) $x^2-12x+37=0$;

г) $x^2+22x+112=0$;

д) $x^2-9x+14=0$;

е) $x^2+11x+18=0$;

ж) $x^2-11x-26=0$;

з) $x^2+15x-16=0$.

7 Решите уравнение:

а) $4x^2+x-3=0$;

б) $3x^2-7x+4=0$;

в) $2x^2-3x+1=0$;

г) $5x^2-x+2=0$;

д) $3x^2+2x-5=0$;

е) $2x^2+x-6=0$;

ж) $2x^2+3x-5=0$;

з) $4x^2+3x-22=0$.

8 Решите уравнение:

а) $x^2-6x=4x-25$;

б) $x^2+2x=6x-16$;

в) $5x^2+1=6x-4x^2$;

г) $3x^2+9=12x-x^2$;

д) $\frac{1}{4}x^2+5x+4=3x+1$;

е) $\frac{1}{4}x^2-3x+5=4-4x$;

ж) $\frac{1}{2}x^2+2x+3=4x-3$;

з) $\frac{1}{3}x^2+6x+7=9x-1$.

П

9 Решите уравнение:

а) $(x+2)^2+2(x+2)=3$;

б) $(x-2)^2-(x-2)=\frac{3}{4}$;

в) $(2x-1)^2-4(2x-1)=5$;

г) $(2x-1)^2-3(2x+2)=1\frac{3}{4}$.

10 Решите уравнение:

а) $x^2+4|x|+4=0$;

б) $x^2-4|x|+4=0$;

в) $x^2-4|x|+3=0$;

г) $x^2+4|x|+3=0$.

М

11 При каких значениях x верно равенство:

а) $x^4+2x^2-3=0$;

б) $x^4-2x^2+5=0$;

в) $4x^4+4x^2+1=0$;

г) $4x^4+4x^2-3=0$?

12 Решите уравнение:

а) $x^2-3x+|x|+1=0$;

б) $x^2-3|x|-x+4=0$;

в) $(x+1)^2+2|x+1|=0$;

г) $(x-2)^2-4|x-2|=0$.

4.3 Формула корней квадратного уравнения

Вспоминаем то, что знаем

- Какое преобразование называется выделением полного квадрата в многочлене второй степени с одной переменной?
- Выделите полный квадрат в многочлене
$$4x^2-20x+9.$$
- Выделите полный квадрат в многочлене
$$4a^2x^2+4abx+4ac.$$

Открываем новые знания

- Решите уравнение $ax^2+bx+c=0$, предварительно умножив обе его части на $4a$ и затем выделив полный квадрат.

Как решать квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

В предыдущих параграфах мы рассматривали частные случаи решения квадратных уравнений. Решим уравнение $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$, в общем виде.

Применим к этому уравнению метод выделения полного квадрата. Для удобства вычислений умножим обе части уравнения на $4a$:

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0.$$

Выделим полный квадрат:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac;$$
$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Выражение $D=b^2-4ac$ принято называть *дискриминантом* квадратного уравнения.

Рассмотрим возможные случаи.

1. Если $D=b^2-4ac>0$, то

$$2ax+b=\pm\sqrt{D};$$
$$2ax=-b\pm\sqrt{D}.$$

Уравнение имеет два корня:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Или:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Полученное выражение будем называть *формулой корней квадратного уравнения*.

Пример 1. Решим уравнение $3x^2+x-4=0$.
Коэффициенты квадратного уравнения:

$$a=3,\ b=1,\ c=-4.$$

Вычислим дискриминант:

$$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot3\cdot(-4)=49.$$

Воспользуемся полученной формулой:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm7}{6}, \text{ откуда } x_1=\frac{-1+7}{6}=1,\ x_2=\frac{-1-7}{6}=-\frac{4}{3}.$$

Ответ: 1 и $-\frac{4}{3}$.

Пример 2. Решим уравнение $4x^2-12x+7=0$.
Коэффициенты квадратного уравнения:

$$a=4,\ b=-12,\ c=7.$$

Вычислим дискриминант:

$$D=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot4\cdot7=32.$$

Получим:

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{32}}{2\cdot4}=\frac{12\pm4\cdot\sqrt{2}}{8}.$$

Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{2}}{2}$.

2. Если $D=b^2-4ac=0$, то уравнение принимает вид:

$$(2ax+b)^2=0;$$
$$2ax+b=0, \text{ откуда } 2ax=-b.$$

Уравнение имеет единственный корень:

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

Пример 3. Решим уравнение $4x^2+4x+1=0$.
Коэффициенты квадратного уравнения:

$$a=4,\ b=4,\ c=1.$$

Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0.$$

Корень уравнения:

$$x = -\frac{4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-0{,}5$.

Заметим, что корень данного уравнения может быть получен и непосредственно из формулы корней квадратного уравнения, причём, так как дискриминант равен нулю, получается, что $x_1 = x_2$. Иногда удобно считать, что в этом случае уравнение имеет два *равных* корня.

3. Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то уравнение корней не имеет.

Действительно, в правой части равенства

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

стоит отрицательное число, в левой части — неотрицательное.

Пример 4. Решим уравнение $3x^2 + 4x + 5 = 0$.

Коэффициенты квадратного уравнения:

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 5.$$

Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 - 60 < 0.$$

Ответ: уравнение корней не имеет.

Таким образом, мы выяснили, что число корней квадратного уравнения зависит от дискриминанта.

1. Если дискриминант уравнения больше нуля ($D > 0$), то квадратное уравнение имеет два различных корня:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$
2. Если дискриминант уравнения равен нулю ($D = 0$), то квадратное уравнение имеет единственный корень (два равных корня):
$$x = -\frac{b}{2a}.$$
3. Если дискриминант уравнения меньше нуля ($D < 0$), то квадратное уравнение не имеет корней.

Отметим, что с помощью полученной формулы можно решать любые квадратные уравнения, в том числе и неполные. Однако неполные квадратные уравнения выгоднее решать методом разложения на множители.

Развиваем умения

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.
а) Что называется дискриминантом квадратного уравнения?
б) Сколько корней может иметь квадратное уравнение?

2 Вычислите дискриминант квадратного уравнения и определите число его корней:

а) $x^2-4x-9=0$;
б) $-x^2+x-1=0$;
в) $x^2+2x+27=0$;
г) $-x^2-7x-1=0$;
д) $-2x^2+x-4=0$;
е) $2x^2-4x+2=0$;
ж) $11x^2-x-1=0$;
з) $5x^2-2x+1=0$.

3 Какие из следующих уравнений не имеют корней:

а) $17x=70+3x^2$;
б) $x^2-12x=7$;
в) $10x^2+1=3x$;
г) $x^2+26x+170=0$;
д) $81x^2=18x-1$;
е) $x^2-x=1$;
ж) $5x^2=x-1$;
з) $x^2=6-2x$?

Н

4 Решите уравнение:

а) $x^2-6x+8=0$;
б) $x^2+12x+36=0$;
в) $x^2-9x+18=0$;
г) $x^2+6x+5=0$;
д) $x^2-5x-14=0$;
е) $x^2+7x+15=0$;
ж) $x^2-9x+20=0$;
з) $x^2-2x-15=0$.

5 Решите уравнение:

а) $-2x^2+7x-6=0$;
б) $3x^2-7x+2=0$;
в) $2x^2+5x+2=0$;
г) $5x^2-9x-2=0$;
д) $2x^2-9x+10=0$;
е) $3x^2+11x-20=0$;
ж) $4x^2+4x-15=0$;
з) $-9x^2-3x-1=0$.

6 Найдите корни уравнения:

а) $(x-2)(x-3)=12$;
б) $(x+1)(x+3)=15$;
в) $(x+2)(x-6)+7=0$;
г) $(x+4)(x-6)+9=0$;
д) $(x-3)(3x+1)+8=0$;
е) $(x-1)(2x-7)+3=0$;
ж) $5x(x+2)=2x-3$;
з) $3x(x-3)=x-8$.

7 Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2}{4} = 2x - 3$;

б) $\frac{x^2}{3} = 5x - 12$;

в) $\frac{x^2 + 1}{5} = 2x - 4$;

г) $\frac{x^2 - 1}{2} = 6x - 18$;

д) $x^2 - 6 = \frac{8x - 9}{5}$;

е) $2x^2 - 5 = \frac{5x + 2}{4}$;

ж) $\frac{7x + 5}{4} = \frac{x^2 + x}{3}$;

з) $\frac{x^2 - x}{5} = \frac{3x + 1}{4}$.

8 Решите уравнение:

а) $x^2 - 2x - 1 = 0$;

б) $x^2 + 3x + 3 = 0$;

в) $x^2 - 5x + 2 = 0$;

г) $x^2 - 4x + 1 = 0$;

д) $6x^2 - x - 1 = 0$;

е) $-2x^2 + 3x - 5 = 0$;

ж) $7x^2 + 2x - 1 = 0$;

з) $4x^2 + 3x - 2 = 0$.

П

9 Решите уравнение:

а) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$;

б) $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$;

в) $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$;

г) $x^2 + \sqrt{7}x - 14 = 0$;

д) $2x^2 + \sqrt{5}x + 3 = 0$;

е) $3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$;

ж) $4x^2 - 2x + 2\sqrt{2} - 8 = 0$;

з) $3x^2 + x - \sqrt{3} - 9 = 0$.

10 Найдите значения a, при которых квадратное уравнение имеет единственный корень:

а) $x^2 + ax + 9 = 0$;

б) $x^2 - 8x + a = 0$;

в) $3x^2 + 2ax + 1 = 0$;

г) $5x^2 - 2x + a = 0$.

11 Решите уравнение:

а) $(x+1)(x^2 - 5x + 6) = 0$;

б) $(x-2)(x^2 + x - 2) = 0$;

в) $(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0$;

г) $(x^2 + 3)(x^2 + x - 6) = 0$.

12 Докажите, что если $q < 0$, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ обязательно имеет корень.

13 Докажите, что одно из уравнений $x^2 + mx - n = 0$ и $x^2 + mx + n = 0$ обязательно имеет корень.

14 Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=0$;

б) $\dfrac{x^2+3x-4=0}{x+4}$;

в) $\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=0$;

г) $\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}=0$.

М

15 Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2+6x+8}{\sqrt{x+3}}=0$;

б) $\dfrac{2x^2-9x-5}{\sqrt{6-x}}=0$;

в) $\dfrac{7x^2-6x-1}{\sqrt{2-3x}}=0$;

г) $\dfrac{x^2-8x-57}{\sqrt{2+x}}=0$.

16 Решите уравнение:

а) $x+\sqrt{x}=2$;

б) $x+\sqrt{x+3}=5$;

в) $3x-\sqrt{x}=4$;

г) $3x-\sqrt{x-2}=6$.

17 Докажите, что корни приведённого квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ могут быть найдены по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

4.4 Теорема Виета

Вспоминаем то, что знаем

- Запишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Открываем новые знания

- Найдите сумму записанных вами корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Как эта сумма выражается через коэффициенты квадратного уравнения?
- Найдите произведение корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Как это произведение выражается через коэффициенты квадратного уравнения?

?! Как можно найти сумму и произведение корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, не решая само уравнение, но зная, что оно имеет корни?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

В предыдущем параграфе мы получили формулу корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Исследуем соотношение между корнями и коэффициентами квадратного уравнения с другой точки зрения. Найдём сумму корней:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

Получили, что

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}.$$

Теперь найдём произведение корней:

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a},$$

то есть

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Полученные соотношения, связывающие сумму и произведение корней квадратного уравнения, принято называть *формулами Виета*, в честь французского математика Франсуа Виета (1540—1603).

Следующее утверждение называют *теоремой Виета*:

> Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то
> $$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \text{ а } x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Заметим, что формулы Виета можно применять и в случае, когда уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет единственный корень, если считать, что в этом случае $x_1=x_2$. Убедитесь в этом самостоятельно.

Пример 1. Найдем сумму и произведение корней уравнения $2x^2-x-4=0$.

Сначала убедимся, что уравнение имеет корни:

$$D=1^2-4\cdot 2\cdot(-4)>0.$$

Воспользуемся теоремой Виета:

$$x_1+x_2=-\frac{-1}{2}=0{,}5,\ x_1\cdot x_2=\frac{-4}{2}=-2.$$

Ответ: сумма корней равна 0,5, а произведение -2.

Пример 2. Найдём подбором корни уравнения $8x^2-7x-1=0$.
Один из корней угадывается легко: $x_1=1$.
Второй корень получим из теоремы Виета:

$$x_1\cdot x_2=\frac{-1}{8}=-\frac{1}{8};$$

$$1\cdot x_2=-\frac{1}{8},\text{ откуда } x_2=-\frac{1}{8}.$$

Ответ: 1 и $-\frac{1}{8}$.

Теперь докажем теорему, обратную к теореме Виета.

Если $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, а $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, то

x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Воспользуемся условием теоремы:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a};$$

$$b=-a(x_1+x_2),\ c=ax_1\cdot x_2.$$

Решим теперь уравнение $ax^2+bx+c=0$, подставив в него вместо b и c полученные выражения:

$$ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1\cdot x_2=0.$$

Разделим обе части уравнения на a:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2-x_1x-x_2x+x_1\cdot x_2=0;$$

$$x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=0;$$

$$(x-x_1)(x-x_2)=0.$$

Следовательно, $x=x_1$, $x=x_2$ — корни уравнения, что и требовалось доказать.
Применим полученный результат для решения следующей задачи.

Пример 3. Составим уравнение, корни которого равны 2 и -6.
Решение. Пусть $x_1=2$, $x_2=-6$. Воспользуемся обратной теоремой Виета:

$$x_1+x_2=-4,\ x_1\cdot x_2=-12.$$

Следовательно,

$$-\frac{b}{a}=-4,\ \frac{c}{a}=-12.$$

Пусть $a=1$, тогда $b=4$, $c=-12$.
Ответ: $x^2+4x-12=0$.

Развиваем умения

Н

1 Сформулируйте теорему Виета для квадратного уравнения. Сформулируйте обратную теорему. Приведите примеры.

2 Решите уравнение. Сделайте проверку по теореме Виета:

а) $x^2-3x+2=0$;
б) $x^2+x-2=0$;
в) $2x^2-x-1=0$;
г) $3x^2-2x+1=0$;
д) $x^2-x=0$;
е) $x^2+2x=0$;
ж) $x^2-3=0$;
з) $2x^2-3x=0$.

3 Один из корней уравнения равен 2. Найдите другой корень:

а) $x^2+x-6=0$;
б) $x^2-3x+2=0$;
в) $x^2+5x-14=0$;
г) $x^2-7x+10=0$;
д) $5x^2-x-18=0$;
е) $2x^2+x-10=0$;
ж) $4x^2-3x-10=0$;
з) $2x^2+3x-14=0$.

4 Найдите сумму и произведение корней уравнения (если они существуют):

а) $x^2+x-1=0$;
б) $x^2-x+5=0$;
в) $x^2+5x-10=0$;
г) $x^2-6x+2=0$;
д) $3x^2-x+1=0$;
е) $2x^2+2x-7=0$;
ж) $2x^2-3x-10=0$;
з) $5x^2+3x+1=0$.

5 Определите знаки корней уравнения (если корни существуют):

а) $x^2-7x+11=0$;
б) $x^2-15x-30=0$;
в) $x^2+10x-20=0$;
г) $x^2+10x+26=0$;
д) $5x^2-x+1=0$;
е) $3x^2+x-1=0$;
ж) $4x^2+2x+1=0$;
з) $8x^2-7x-8=0$.

Н

6 Придумайте квадратное уравнение, имеющее данные корни. Сколько таких уравнений существует?

а) 3 и 2;
б) 3 и -2;
в) 1 и 0;
г) 2 и -2;
д) -11 и 6;
е) -3 и -8;
ж) 2 и -15;
з) 11 и 7.

7 Составьте уравнение, корни которого противоположны корням данного уравнения (если корни данного уравнения существуют):

а) $x^2-x+5=0$;
б) $x^2-x-2=0$;

в) $x^2+3x+1=0$; е) $5x^2-x+1=0$;

г) $x^2-5x-2=0$; ж) $3x^2-x-3=0$;

д) $2x^2+x+7=0$; з) $2x^2-3x-7=0$.

П

8 Составьте уравнение, корни которого обратны корням данного уравнения (если корни данного уравнения существуют):

а) $x^2-x-5=0$; д) $2x^2+x-7=0$;

б) $x^2-x+2=0$; е) $5x^2-x-1=0$;

в) $x^2+3x-1=0$; ж) $3x^2-x+3=0$;

г) $x^2-5x+2=0$; з) $2x^2-3x-7=0$.

9 Докажите, что если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$, а $x_1 \cdot x_2=q$.

10 Сформулируйте условие, при котором уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни:
а) разных знаков; б) одного знака.

11 Найдите сумму квадратов корней уравнения:

а) $x^2-x+2=0$; д) $2x^2-x=0$;

б) $x^2-x-1=0$; е) $8x^2-1=0$;

в) $x^2+3x-5=0$; ж) $2x^2-4x+1=0$;

г) $x^2-2x-7=0$; з) $4x^2-2x+1=0$.

12 Придумайте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, имеющее данные корни. Сколько таких уравнений существует?

а) 1,5 и 2; в) −2,4 и 4,2; д) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$; ж) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$;

б) 2 и −1,1; г) 0 и −1,5; е) −3 и $1\frac{1}{2}$; з) $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$.

13 Решите уравнение, используя формулы Виета:

а) $x^2+2x=2+2\sqrt{2}$; в) $3x^2-4x=15-4\sqrt{5}$;

б) $x^2-4x=3-4\sqrt{3}$; г) $2x^2-x=8-\sqrt{2}$.

14 Придумайте уравнение $x^2+px+q=0$, корнями которого являются:
а) противоположные числа; б) взаимно обратные числа.

15 Найдите значения q, при которых для уравнения $3x^2-6x+q=0$ выполняется данное условие:

а) $x_1+2x_2=0$; в) $6x_1-x_2=0$;

б) $x_1-2x_2=0$; г) $6x_1-x_2=0$.

М

16 Найдите сумму кубов корней уравнения:

а) $x^2-5x+2=0$; в) $2x^2+3x+4=0$;

б) $x^2-4x-1=0$; г) $3x^2+x-1=0$.

17 Придумайте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен:

а) $1-\sqrt{3}$; б) $4+\sqrt{5}$; в) $2+\sqrt{2}$; г) $-1+\sqrt{2}$.

18 Придумайте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого на 1 больше соответствующих корней уравнения $3x^2-11x+2=0$.

19 Один из корней уравнения $x^2+px-18=0$ равен 9. Найдите второй корень уравнения и коэффициент p.

20 Один из корней уравнения $x^2+6x+q=0$ равен -7. Найдите второй корень уравнения и коэффициент q.

4.5 Разложение выражения ax^2+bx+c на множители

Вспоминаем то, что знаем

- Запишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.
- Запишите теорему Виета для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, зная, что оно имеет корни.

Открываем новые знания

- Запишите выражение $a(x-x_1)(x-x_2)$, раскройте скобки и упростите, используя теорему Виета. Какое выражение у вас получилось?
- Запишите квадратный трёхчлен ax^2+bx+c. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то по теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Выразите из этих равенств b и c, подставьте полученные выражения в квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, после чего разложите на множители методом группировки. Какое выражение у вас получилось?

?! Как можно разложить на множители квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, зная корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Нам уже приходилось раскладывать на множители многочлены второй степени. Чаще всего мы это делали методом группировки, используя тождества сокращённого умножения. Решим эту задачу в общем виде.

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Тогда по теореме Виета:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a},\ \text{откуда } b=-a(x_1+x_2),\ c=ax_1\cdot x_2.$$

Подставим значения b и c в многочлен ax^2+bx+c и разложим его на множители:

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1\cdot x_2=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right)=$$
$$=a\left(x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2\right)=a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right)=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

> Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$,
> то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Пример 1. Разложим на линейные множители $x^2-10x+16$.

Сначала решим уравнение:

$$x^2-10x+16=0.$$

Найдём дискриминант:

$$D=100-64=36.$$

Корни квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{10\pm 6}{2},\ \text{откуда } x_1=8,\ x_2=2.$$

Коэффициент $a=1$.

Воспользовавшись формулой разложения квадратного трёхчлена на линейные множители, получим: $x^2-10x+16=(x-8)(x-2)$.

Пример 2. Разложим на линейные множители

$$2x^2+7x+6.$$

Решим уравнение

$$2x^2+7x+6=0.$$

Найдём дискриминант:

$$D=49-48=1.$$

Корни квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 1}{4}, \text{ откуда } x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = -2.$$

Коэффициент $a = 2$.

Воспользовавшись формулой, получим: $2x^2 + 7x + 6 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+2)$.

Перемножим числовой множитель с первой скобкой. Ответ запишем в виде: $2x^2 + 7x + 6 = (2x+3)(x+2)$.

Пример 3. Сократим дробь

$$\frac{2x^2 + 7x + 6}{4x + 6}.$$

Воспользуемся результатом предыдущей задачи:

$$\frac{2x^2 + 7x + 6}{4x + 6} = \frac{(2x+3)(x+2)}{2(2x+3)} = \frac{x+2}{2}.$$

Ответ: $\frac{x+2}{2}$.

Развиваем умения

Н

1 Напишите формулу разложения на линейные множители многочлена $ax^2 + bx + c$.

2 Представьте в виде произведения линейных множителей:

а) $x^2 - 8x + 7$;
б) $x^2 - x - 2$;
в) $-x^2 + 3x + 4$;
г) $-x^2 - 6x + 27$;
д) $x^2 - 8x + 12$;
е) $x^2 + 2x - 15$;
ж) $x^2 - 4x - 21$;
з) $x^2 + 9x + 14$.

3 Разложите выражение на линейные множители:

а) $3x^2 - x - 2$;
б) $4x^2 - 7x + 3$;
в) $-2x^2 + 3x + 5$;
г) $2x^2 - x - 6$;
д) $-3x^2 + 4x - 1$;
е) $4x^2 - 12x + 9$;
ж) $5x^2 - x - 18$;
з) $2x^2 - 3x - 2$.

Н

4 Сократите дробь:

а) $\frac{a+2}{a^2 + 3a + 2}$;
б) $\frac{3-b}{b^2 - 2b - 3}$;

в) $\dfrac{3a^2-7a+2}{2-3a}$;

г) $\dfrac{5b^2-12b+4}{6-15b}$;

д) $\dfrac{a^2-4}{a^2+a-6}$;

е) $\dfrac{b^2-9}{b^2-9b+18}$;

ж) $\dfrac{5a^2+10a}{3a^2+5a+2}$;

з) $\dfrac{6b^2-18b}{b^2-2b-15}$.

5 Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-8a+15}{a^2+7a-30}$;

б) $\dfrac{b^2+4b-12}{b^2-9b+14}$;

в) $\dfrac{5a^2-13a+6}{a^2-4a+4}$;

г) $\dfrac{b^2-4b+4}{7b^2-9b-10}$;

д) $\dfrac{5a^2-7a-24}{7a^2-24a+9}$;

е) $\dfrac{3b^2+11b-4}{7b^2+23b-20}$;

ж) $\dfrac{5a^2+8a+3}{11a^2-3a+14}$;

з) $\dfrac{6b^2-19b+13}{2b^2+7b-9}$.

П

6 Известно, что 1 — корень квадратного уравнения $3x^2+bx-2=0$. Найдите b и разложите многочлен $3x^2+bx-2$ на линейные множители.

7 Разложите выражение на линейные множители:

а) $x^2-(a+b)x+ab$;

б) $x^2-(2a+3b)x+6ab$;

в) $x^2+(2a+a^2)x+2a^3$;

г) $x^2+(a^2-2a)x-2a^3$.

8 Разложите на линейные множители:

а) $a^2+ab-2b^2$;

б) $m^2-3mn+2n^2$;

в) $3p^2+2pq-16q$;

г) $5s^2-2st-16t$.

М

9 Сократите дробь:

а) $\dfrac{a-5\sqrt{a}+6}{2-\sqrt{a}}$;

б) $\dfrac{b-6\sqrt{b}+8}{4-\sqrt{b}}$;

в) $\dfrac{a-\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-2}$;

г) $\dfrac{b-2\sqrt{b}-3}{\sqrt{b-3}}$.

10 Сократите дробь:

а) $\dfrac{9a^2-9a+2}{1-3a+b-3ab}$; в) $\dfrac{16a^2-8a+1}{1-4a-b+4ab}$;

б) $\dfrac{2-5b-2a+5ab}{10b^2-9b+2}$; г) $\dfrac{1-6b+a-6ab}{1-12b+36b^2}$.

4.6 Решение задач

Знакомимся с новой темой

Как мы говорили ранее, при решении задач обычно поступают следующим образом:

1) обозначают буквой какую-нибудь неизвестную величину (чаще всего искомую), выражают через неё другие величины, составляют уравнение;
2) решают полученное уравнение;
3) отвечают на вопрос задачи.

Рассмотрим несколько задач, которые можно решить, составив квадратное уравнение.

Задача 1. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 221. Найдите эти числа.

Решение. В условии задачи упоминаются два числа.

Пусть меньшее число равно x, тогда второе число равно $x+1$, а сумма квадратов $x^2+(x+1)^2$. Составим уравнение:

$$x^2+(x+1)^2=221.$$

Решим уравнение:

$$2x^2+2x=220;$$
$$x^2+x-110=0;$$
$$x_1=10,\ x_2=-11.$$

В условии задачи речь идёт о натуральных числах, поэтому -11 не может быть ответом задачи. Следовательно, первое число равно 10, а второе 11.

Ответ: 10 и 11.

Задача 2. Площадь прямоугольника составляет 120 см^2. Найдите его стороны, если их разность равна 2 см.

Решение. Пусть меньшая сторона прямоугольника равна x см, тогда бо́льшая сторона $x+2$ см, а площадь равна $x(x+2)$ см^2. Составим уравнение:

$$x(x+2)=120.$$

Решив уравнение $x^2+2x-120=0$, получим $x_1=10$, $x_2=-12$. Получили, что меньшая сторона 10 см, а бо́льшая 12 см. Второй корень уравнения не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 10 см и 12 см.

Развиваем умения

Н

1 Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 182. Найдите эти числа.

2 Известно, что произведение двух чисел 96, а сумма 20. Найдите эти числа.

3 Население города за 2 года увеличилось на 44%. Найдите средний ежегодный прирост населения, выраженный в процентах.

4 Сумма квадратов трёх последовательных натуральных чисел равна 590. Найдите эти числа.

Н

5 Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 869.

6 Если к квадрату натурального числа прибавить само это число, то полученный результат будет в 5 раз больше данного числа. Найдите неизвестное число.

7 В актовом зале установили 323 кресла рядами так, что число кресел в ряду оказалось на 2 меньше числа рядов. Сколько кресел в ряду?

8 Ширина прямоугольника в три раза меньше длины. Найдите его стороны, если его площадь равна 48 см^2.

9 От листа железа, имеющего форму квадрата, отрезали полосу шириной 3 см, после чего площадь оставшейся части листа стала равной 10 см^2. Найдите сторону квадрата.

10 Периметр прямоугольника равен 46 см, а площадь равна 120 см^2. Найдите его стороны.

11 Найдите длины катетов, если гипотенуза равна 13 см, а один из катетов больше другого на 7 см.

П

12 Среднее арифметическое двух положительных чисел равно 10, а среднее геометрическое равно 8. Найдите эти числа.

13 Разность двух положительных чисел равна 9, а их среднее геометрическое равно 6. Найдите эти числа.

14 Все одноклассники обменялись рукопожатиями. Сколько учеников в классе, если всего было 210 рукопожатий?

15 Количество диагоналей выпуклого многоугольника на 42 больше количества сторон. Сколько сторон у многоугольника?

М

16 Найдите четыре последовательных целых числа, если известно, что сумма квадратов первого и третьего в 1,3 раза меньше, чем сумма квадратов второго и четвёртого чисел.

17 После каждой стирки кусок мыла уменьшается на x%. После двух стирок кусок мыла уменьшился наполовину. Найдите x.

18 Составьте задачу, которую можно решить при помощи уравнения:

а) $x(x-3)=130$;

б) $(6-x)x=8$;

в) $x^2+(x+7)^2=(x+8)^2$;

г) $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=110$.

Исследовательский проект «Имеет ли квадратное уравнение корни?»

Рассмотрим приведённое квадратное уравнение $x^2+px+q=0$. Если выбрать числа p и q наугад из интервала $[-100;\ 100]$, какое событие более вероятно: уравнение имеет корни или уравнение не имеет корней? Ответьте на этот же вопрос для других интервалов, например, $[0;\ 100]$, $[0;\ 1]$, $[0;\ 0{,}1]$.

Жизненная задача*

СИТУАЦИЯ. Вытекание воды из бака.

ВАША РОЛЬ. Инженер.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После открытия крана вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=H_0-\sqrt{2gH_0}kt+\frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0=20$ м — начальная высота столба воды, k — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, g — ускорение свободного падения.

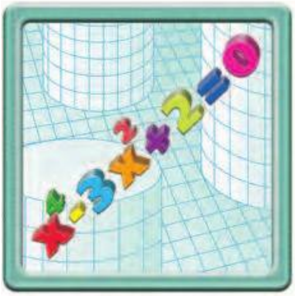
ЗАДАНИЕ. Установите, через какое время после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды. Известно, что $k=\frac{1}{300}$. Считайте $g=10$ м/с^2. Сколько решений имеет задача?

---

* По мотивам задачи из банка заданий для подготовки к ЕГЭ по математике.

ГЛАВА V РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1 Целые рациональные уравнения



Вспоминаем то, что знаем

- Что можно сказать о сомножителях, произведение которых равно нулю?

Открываем новые знания

- Решите уравнение $(x^2-x-12)(x+5)=0$.
- Рассмотрите уравнение
  $(x^2-x-6)^2-2(x^2-x-6)-24=0$.

а) Выражение x^2-x-6 встречается в этом уравнении дважды. Попробуйте обозначить его новой буквой, например, $x^2-x-6=t$. Какой вид примет уравнение, если заменить дважды встречающееся в нём выражение x^2-x-6 буквой t? Можете ли вы решить получившееся после замены уравнение с неизвестным t?

б) Решите уравнение с неизвестным t. Какие корни вы получили?

в) Придумайте, что можно дальше делать с этими корнями (значениями неизвестного t), чтобы найти интересующие нас значения неизвестного x.

?! Как решать уравнения методом разложения на множители его левой части при нулевой правой части?
Как решать уравнения методом замены неизвестного?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Целым рациональным уравнением с одним неизвестным будем называть уравнение, представляющее собой равенство целых алгебраических выражений.

Можно сказать иначе: в целом рациональном уравнении нет деления на буквенное выражение.

Как мы уже не раз видели, решение уравнений обычно сводится к тождественным преобразованиям, при которых данное уравнение заменяют другим, равносильным ему уравнением, но более простым. Полученное уравнение также заменяем другим и так действуем до тех пор, пока не получим уравнение, которое умеем решать.

Мы научились решать линейные и квадратные уравнения (уравнения первой и второй степени). Попробуем научиться сводить целое рациональное уравнение к одному или нескольким линейным или квадратным уравнениям. При этом мы будем использовать свойства равенств и тождественные преобразования.

Свести уравнение к более простым уравнениям можно, если представить его в виде произведения, равного нулю.

Пример 1. Решим уравнение

$$(x^2-5x)(x^2-3x+2)=0.$$

Пусть x — корень уравнения, т.е. равенство верно.

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Возможно два случая:

1) $x^2-5x=0$, тогда $x_1=0$; $x_2=5$.

2) $x^2-3x+2=0$, тогда $x_3=1$, $x_4=2$.

Ответ: 0; 1; 2; 5.

В некоторых случаях раскладывать левую часть уравнения на множители (при правой части, равной нулю) придётся самостоятельно.

Пример 2. Решим уравнение

$$4x^3+4x^2=x+1.$$

Преобразуем уравнение:

$$4x^2(x+1)-(x+1)=0;$$
$$(x+1)(4x^2-1)=0.$$

Рассуждаем так же, как при решении примера 1, получим:

1) $x+1=0$, откуда $x_1=-1$;

2) $4x^2-1=0$, $x_{2,3}=\pm 0{,}5$.

Ответ: -1; $\pm 0{,}5$.

Другой распространённый приём — замена неизвестного. Суть метода поясним на примерах.

Пример 3. Решим уравнение

$$(x^2+3x+1)^2-2(x^2+3x+1)-3=0.$$

Решение. Пусть $y=x^2+3x+1$, тогда x будет корнем данного уравнения только в том случае, если y будет корнем уравнения $y^2-2y-3=0$.

Поэтому данное уравнение можно решать так:

1) Решим уравнение $y^2-2y-3=0$. Получим: $y_1=-1$, $y_2=3$.

2) Решим уравнения $x^2+3x+1=-1$ и $x^2+3x+1=3$.

Корни первого уравнения: $x_1=-1$, $x_2=-2$.

Корни второго: $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: -1; -2; $\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^4-3x^2+2=0.$$

Сначала перепишем уравнение в виде:

$$\left(x^2\right)^2 - 3x^2 + 2 = 0,$$

после чего сделаем замену $y = x^2$.

1) Решим уравнение $y^2 - 3y + 2 = 0$. Получим: $y_1 = 2$, $y_2 = 1$.

2) Осталось решить уравнения $x^2 = 1$, $x^2 = 2$.

Ответ: ± 1, $\pm\sqrt{2}$.

Подобным образом можно решить любое *биквадратное уравнение* (так принято называть уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$).

Развиваем умения

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Что называется целым рациональным уравнением с одним неизвестным?
б) Что называется биквадратным уравнением?

2 Решите уравнение:

а) $\left(x^2 - 1\right)(2x + 3) = 0$;
б) $\left(x^2 - 2x\right)(x - 2) = 0$;
в) $\left(x^2 + x - 2\right)(x - 1) = 0$;
г) $\left(x^2 + x - 6\right)(x + 3) = 0$;
д) $\left(x^2 - 5x + 6\right)\left(x^2 + 3x + 1\right) = 0$;
е) $\left(x^2 + x - 6\right)\left(x^2 - x + 6\right) = 0$;
ж) $\left(2x^2 + 3x - 5\right)\left(x^2 + x - 3\right) = 0$;
з) $\left(2x^2 + x - 10\right)\left(2x^2 - x + 3\right) = 0$.

Н

3 Решите уравнение:

а) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$;
б) $x^4 - x^3 - 6x^2 = 0$;
в) $10x^2 - x^4 = 3x^3$;
г) $x^3 = 2x^2 - x^4$;
д) $(x + 1)x^2 = (x + 1)(2x + 3)$;
е) $x^3 + x^2 = x + 1$;
ж) $x^3 - 1 = x^2 - x$;
з) $x^3 - 1 = x^2 - x$.

4 Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$;
б) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;
в) $x^4 + 5x^2 + 9 = 0$;
г) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
д) $5x^4 + x^2 - 4 = 0$;
е) $6x^4 - x^2 - 5 = 0$;
ж) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$;
з) $2x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

5 Решите уравнение:

а) $(x + 2)^4 - 2(x + 2)^2 - 3 = 0$;
б) $(x - 3)^4 - 3(x - 3)^2 + 2 = 0$;
в) $3(x + 1)^4 - 2(x + 1)^2 - 1 = 0$;
г) $3(1 - x)^4 + (x - 1)^2 - 4 = 0$;

д) $(4x+3)^4+2(4x+3)^2+3=0$;

е) $2(2x-1)^4+3(2x-1)^2-5=0$;

ж) $4(3x-1)^4+4(3x-1)^2+1=0$;

з) $2(2x-1)^4+(2x-1)^2-3=0$.

П

6 Придумайте биквадратное уравнение:

а) не имеющее корней;

б) имеющее один корень;

в) имеющее два корня;

г) имеющее три корня;

д) имеющее четыре корня.

7 Решите уравнение:

а) $3(x^2+2x)^2+5(x^2+2x)-2=0$;

б) $(x^2+2x)^2+x^2+2x+3=0$;

в) $(x^2+3x-3)^2-2(x^2+3x-3)+1=0$;

г) $(x^2-5x+7)^2-2(x^2-5x+7)-3=0$.

8 Решите уравнение:

а) $(2x-1)^2=3|2x-1|$;

б) $(x^2+2x)^2=3|x^2+2x|$;

в) $2x-4=3\sqrt{2x-4}$;

г) $4-x^2=3\sqrt{x^2-4}$.

М

9 Решите уравнение:

а) $(x^2+2x)(x^2-x)=3x^2-3x$;

б) $(x^2+2x)(x^2-x)=2x^2+4x$;

в) $(x^3-7)(x^2-1)=x^2-1$;

г) $(x^3+9)(x^2+1)=x^2+1$.

10 Решите уравнение:

а) $(x^2+x-2)(x^2+x-12)=144$;

б) $(x^2+2x-1)(2x^2+4x-1)=10$;

в) $x(x+3)(x^2+3x+1)=20$;

г) $x(2x-1)(2x^2-x-5)=150$.

11 Решите уравнение:

а) $(x^2+2x)^2+7=4(x+1)^2$;

б) $(x^2-4x)^2-8=(x-2)^2$;

в) $(x^2+x+1)^2=3x^2+3x+1$;

г) $(x^2+2x+4)^2=7x^2+14x+16$.

5.2 Дробные рациональные уравнения

Знакомимся с новой темой

Дробным рациональным уравнением с одним неизвестным будем называть уравнение, в котором левая или правая часть (или обе части) являются дробными алгебраическими выражениями.

При решении дробных рациональных уравнений данное уравнение заменяем другим, равносильным ему уравнением, но более простым. Полученное уравнение опять заменяем другим и так продолжаем до тех пор, пока не получим уравнение, которое умеем решать.

Дробное рациональное уравнение сводится к целому рациональному уравнению. Решив целое рациональное уравнение, необходимо проверить полученные корни и отбросить те из них, которые обращают в нуль знаменатель хотя бы одной из дробей исходного уравнения.

Пример 1. Решим уравнение

$$\frac{x^2+2x-3}{x-2}=\frac{2x+1}{x-2}.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель $x-2$, после чего упростим полученное уравнение:

$$x^2+2x-3=2x+1;$$

$$x^2=4, \text{ откуда } x_1=2,\ x_2=-2.$$

Проверим, не обращается ли в нуль знаменатель дроби при найденных значениях x.

Видим, что при $x=2$, $x-2=0$, что означает, что это число не является корнем исходного уравнения. При $x=-2$, $x-2\neq 0$.

Ответ: -2.

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{5+2x}{4x+1}=\frac{x+3}{7-x}.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель $(4x+1)(7-x)$.

Получим уравнение:

$$(5+2x)(7-x)=(x+3)(4x+1);$$

$$-2x^2+9x+35=4x^2+13x+3;$$

$$6x^2+4x-32=0;$$

$$3x^2+2x-16=0, \text{ откуда } x_1=2,\ x_2=-2\frac{2}{3}.$$

Найденные корни не обращают знаменатели дробей в нуль, следовательно, они являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $2; -2\frac{2}{3}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{7-2x}{x^2-5x-6}+\frac{3}{x^2-9x+18}=\frac{1}{3-x}.$$

Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{7-2x}{(x-6)(x+1)}+\frac{3}{(x-6)(x-3)}=\frac{1}{3-x}.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель $(x-6)(x-3)(x+1)$, получим уравнение:

$$(7-2x)(x-3)+3(x+1)=-(x-6)(x+1).$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$-2x^2+13x-21+3x+3=-x^2+5x+6;$$
$$-x^2+11x-24=0;$$
$$x^2-11x+24=0;$$
$$x_1=8,\ x_2=3.$$

Проверка показывает, что корень $x_2=3$ обращает в нуль знаменатель одной из дробей, а следовательно, не подходит.

Ответ: 8.

Итак, при решении дробных рациональных уравнений можно поступать следующим образом.

1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
3. Решить получившееся целое уравнение.
4. Исключить корни, обращающие в нуль общий знаменатель.

Среди дробных рациональных уравнений встречаются и такие, которые удобно решать методом замены неизвестного.

Пример 4. Решим уравнение:

$$2x^2+4x=\frac{3}{x^2+2x}+5.$$

Пусть $y=x^2+2x$.

1) Решим уравнение

$$2y=\frac{3}{y}+5.$$

Получим: $2y^2-5y-3=0$, откуда $y_1=3$, $y_2=-\frac{1}{2}$. Ни один из этих корней не обращает в нуль знаменатель y.

2) Осталось решить уравнения $x^2+2x=3$, $x^2+2x=-\frac{1}{2}$.

Корни первого уравнения: $x_1=1$, $x_2=-3$.

Корни второго уравнения: $x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$.

Обратите внимание: проверять, обращают ли в нуль эти корни знаменатель исходного уравнения, нет надобности, так как мы нашли их, решая не дробное уравнение, а квадратное. Все необходимые проверки мы уже выполнили для неизвестного y, для которого решали дробное уравнение.

Ответ: 1; -3; $-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Развиваем умения

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Что называется дробным рациональным уравнением?

б) В чём заключается основной метод решения дробных рациональных уравнений?

2 Решите уравнение:

а) $\frac{5}{1-x}=\frac{4}{6-x}$;

б) $\frac{4}{x-6}=\frac{1}{x+3}$;

в) $\frac{6}{x^2+5}=\frac{4}{x^2+3}$;

г) $\frac{2}{x^2-3}=\frac{7}{x^2+2}$;

д) $\frac{5x}{3x-5}=3$;

е) $\frac{6x}{1+2x}=5$;

ж) $\frac{x^2}{2x-3}=3$;

з) $\frac{x^2}{2x+8}=1$.

3 Решите уравнение:

а) $\frac{4x^2-8x}{x^2-12x+20}=0$;

б) $\frac{3x^2+3x}{x^2+4x+3}=0$;

в) $\frac{2x^2+3x+1}{4x^2-1}=0$;

г) $\frac{2x^2-x-1}{2x^2+x}=0$;

д) $\dfrac{x^2-3x}{x}=0;$

е) $\dfrac{4x^2+x}{x+1}=0;$

ж) $\dfrac{x^2-x-2}{4x-1}=0;$

з) $\dfrac{5x^2-x-4}{5x+4}=0.$

Н

4 Решите уравнение:

а) $x+\dfrac{1}{x}=2\dfrac{1}{2};$

б) $\dfrac{x}{8}+\dfrac{8}{x}=2\dfrac{1}{2};$

в) $\dfrac{x}{42}+\dfrac{10}{x}=\dfrac{41}{42};$

г) $\dfrac{x}{20}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{19}{20};$

д) $x-2=\dfrac{15}{x};$

е) $2x+5=\dfrac{3}{x};$

ж) $3x-\dfrac{8}{x}=10;$

з) $21x-\dfrac{4}{x}=5.$

5 Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2}{x-6}=\dfrac{5x+6}{x-6};$

б) $\dfrac{3x^2}{2-x}=\dfrac{4x+8}{2-x};$

в) $\dfrac{3x^2-14x}{x-4}=\dfrac{8}{4-x};$

г) $\dfrac{8x^2-3}{x-3}=\dfrac{23x}{x-3};$

д) $\dfrac{2x-5}{x-1}=\dfrac{5x-3}{3x+5};$

е) $\dfrac{5-x}{2x-1}=\dfrac{-5+x}{3x+1};$

ж) $\dfrac{5+2x}{4x-3}=\dfrac{3x+3}{7-x};$

з) $\dfrac{3x-7}{x+5}=\dfrac{x-3}{x+2}.$

6 Решите уравнение:

а) $\dfrac{10}{x-3}-\dfrac{8}{x}=1;$

б) $\dfrac{15}{x-2}-\dfrac{14}{x}=1;$

в) $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{5};$

г) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}=1\dfrac{1}{4};$

д) $\dfrac{20}{x+3}+\dfrac{20}{x}=3;$

е) $\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{14}{x}=3;$

ж) $\dfrac{7}{x+5}-\dfrac{5}{x-3}=6;$

з) $\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{8}{x}=\dfrac{1}{5}.$

7 Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{6-x}{3x^2-12}=\dfrac{1}{x-2}$;

б) $\dfrac{x-2}{3-x}+\dfrac{x+8}{2x^2-18}=\dfrac{1}{x-3}$;

в) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$;

г) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{8}{x^2-4}$;

д) $\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{5}{x-6}$;

е) $\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{4}{x+6}=\dfrac{3}{x-4}$;

ж) $\dfrac{6}{x^2-2x}-\dfrac{12}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x}$;

з) $\dfrac{27}{x^2+3x}-\dfrac{3}{x^2-3x}=\dfrac{2}{x}$.

8 Решите уравнение:

а) $\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x}-6=0$;

б) $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{6}{x}-3=0$;

в) $\dfrac{(x+1)^2}{4x^2}+\dfrac{x+1}{x}-8=0$;

г) $\dfrac{(2x-1)^2}{x^2}+\dfrac{12x-6}{x}+9=0$;

д) $2x-\dfrac{6}{2x-3}=5$;

е) $3x+\dfrac{8}{3x+1}=8$;

ж) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$;

з) $x^2-\dfrac{1}{x^2}=3\dfrac{3}{4}$.

П

9 При каких значениях букв сумма дробей равна их произведению:

а) $\dfrac{a}{a-4}$ и $\dfrac{1}{a}$; б) $\dfrac{b}{1-b}$ и $\dfrac{1}{b}$; в) $\dfrac{9}{c}$ и $\dfrac{c}{c-4}$; г) $\dfrac{d-3}{d}$ и $\dfrac{1}{3-d}$?

10 Решите уравнение:

а) $\dfrac{2}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x-1}{x^3+1}$;

б) $\dfrac{2x+1}{1-x^2}+\dfrac{2}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{1-x}$;

в) $\dfrac{4x+1}{1+x^3}+\dfrac{x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{6}{1+x}$;

г) $\dfrac{36-x}{x^3+1}+\dfrac{x-6}{x+1}=\dfrac{x^2+x+16}{x^2-x+1}$.

11 Решите уравнение:

а) $\dfrac{3-x}{x^2+2x-3}=\dfrac{9-3x}{3x^2-2x-5}$;

б) $\dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4}=\dfrac{(3x+2)^2}{9x^2-4}$;

в) $\dfrac{2x+2}{2x^2+9x+10}=\dfrac{x+1}{4x^2+4x-15}$;

г) $\dfrac{2x^2+3x-20}{3x^2+10x-8}=\dfrac{(6x+4)^2}{18x^2-8}$.

М

12 Решите уравнение:

а) $\dfrac{9}{x^2+3x+2}=\dfrac{4x-6}{x+2}-\dfrac{x}{x+1}$;

б) $\dfrac{1}{x^2+2x-3}=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x+3}$;

в) $\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{13-7x}{1-x}=\dfrac{6}{x^2-4x+3}$;

г) $\dfrac{8}{x^2-6x+8}+\dfrac{1-3x}{2-x}=\dfrac{4}{x-4}$.

13 Решите уравнение:

а) $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9=0$;

б) $(x+3)^2+\dfrac{1}{(x+3)^2}=2$;

в) $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2-2\left(x-\dfrac{2}{x}\right)-3=0$;

г) $\dfrac{x}{x^2-2}+\dfrac{6(x^2-2)}{x}=7$.

14 Решите уравнение:

а) $\dfrac{4}{x^2+5x-6}-\dfrac{5}{x^2+5x+6}=\dfrac{1}{4}$;

б) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$;

в) $\dfrac{1}{x^2+2x-3}-\dfrac{4}{x^2+2x-8}=\dfrac{1}{6}$;

г) $\dfrac{4x^2+2x+3}{2x^2+x+1}-\dfrac{2x^2+x-2}{6x^2+3x-1}=2$.

5.3 Решение задач

Знакомимся с новой темой

В этом параграфе мы рассмотрим примеры задач, которые решаются с помощью дробных рациональных уравнений.

Задача 1. Расстояние между двумя пристанями равно 2 км. Лодка совершает путь в оба конца за 1 ч 30 мин. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки 1 км/ч.

Решение. Пусть собственная скорость лодки равна x км/ч, тогда скорость лодки по течению реки $x+1$ км/ч, против течения $x-1$ км/ч.

Расстояние 2 км по течению лодка преодолела за $\dfrac{2}{x+1}$ ч, против течения за $\dfrac{2}{x-1}$ ч. Весь путь пройден за $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}$ ч, что составило 1 ч 30 мин (1,5 ч).

Составим и решим уравнение:

$$\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{3}{2};$$

$$4(x-1+x+1)=3(x^2-1);$$

$$3x^2-8x-3=0,\ \text{откуда}\ x_1=3,\ x_2=-1.$$

Второй корень не подходит по смыслу задачи, так как собственная скорость лодки — положительная величина.

Ответ: 3 км/ч.

Задача 2. Два крана, работая вместе, разгрузили баржу за 6 ч. За какое время может разгрузить баржу каждый кран, работая отдельно, если один из них может разгрузить её на 5 ч быстрее, чем другой?

Решение. Пусть один кран разгружает баржу за x часов, тогда другой кран — за $x+5$ часов. За 1 час первый («быстрый») кран выполняет $\frac{1}{x}$ часть работы, а второй $\frac{1}{x+5}$ часть. Вместе за 1 час они выполняют $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}$ часть работы, что согласно условию задачи составляет $\frac{1}{6}$ часть работы.

Решение подобных задач можно оформлять в виде таблицы.

	Время (ч)	Сделано за час
Первый кран	x	$\frac{1}{x}$
Второй кран	$x+5$	$\frac{1}{x+5}$
Вместе	6	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6};$$

$$6x+30+6x=x^2+5x;$$

$$x^2-7x-30=0,\ \text{откуда}\ x_1=10,\ x_2=-3.$$

Второй корень не подходит по смыслу задачи.

Таким образом, первый кран может разгрузить баржу за 10 часов, тогда второй — за 15 часов.

Ответ: 10 ч и 15 ч.

Развиваем умения

Н

1 Числитель дроби на 1 меньше знаменателя. Если данную дробь сложить с обратной ей дробью, то получится $2\frac{1}{12}$. Найдите эту дробь.

2 Чтобы проехать 94 км, автомобилю требуется на 2 ч меньше, чем велосипедисту для прохождения 48 км. Найдите скорость автомобиля, если она на 35 км/ч больше скорости велосипедиста.

3 Моторная лодка прошла 25 км по течению реки и 3 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения равна 3 км/ч.

Н

4 Из пунктов A и B одновременно навстречу другу вышли два пешехода. Скорость первого на 1 км/ч больше скорости второго, поэтому он прибыл в пункт B на 1 ч раньше, чем второй в пункт A. Найдите скорости пешеходов, если расстояние между пунктами A и B равно 20 км.

5 Товарный поезд опаздывает на 18 мин. Чтобы прибыть вовремя, скорость на участке в 60 км увеличена на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

6 Рабочему необходимо изготовить 20 деталей за определённое время. Если делать в час на 1 деталь больше, то рабочий закончит работу на 1 час раньше срока. Сколько деталей изготовляет рабочий в час?

П

7 Катер может проплыть 18 км по течению реки и ещё 2 км против течения за то же время, какое требуется плоту, чтобы проплыть 8 км по этой же реке. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки 8 км/ч.

8 Одна из труб может наполнить бассейн водой на 10 мин быстрее, чем другая. За какое время может наполнить бак каждая труба, если обе трубы за 8 мин заполняют две трети бака?

9 Два грузовых автомобиля участвуют в ралли на 360 км. Скорость первого автомобиля на 15 км/ч больше скорости второго, поэтому он финишировал на 2 ч раньше. Какова скорость первого автомобиля?

10 На середине пути между станциями поезд был задержан на 10 мин. Чтобы прибыть вовремя, машинист увеличил скорость на 12 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда, если расстояние между станциями 120 км.

11 Экскурсанты проплыли на пароходе 45 км вниз по течению реки и после четырёхчасовой остановки вернулись обратно, причём вся экскурсия продолжалась 12 ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость парохода 12 км/ч.

М

12 Известно, что первый велосипедист проходит круг на 2 мин быстрее второго и за 1 час обогнал его на круг. За какое время проходит круг каждый велосипедист?

13 Известно, что первый работник потратит на выполнение работы на 2 ч больше, а второй работник на 4 ч 30 мин больше, чем потребовалось бы им при совместной работе. За какое время они могут выполнить работу, действуя по отдельности?

14 В сплав меди и цинка, который содержит 5 кг цинка, добавили 15 кг цинка. Число, выражающее процентное содержание меди в новом сплаве, на 30 меньше числа, выражающего процентное содержание меди в первоначальном сплаве. Сколько килограммов меди в сплаве?

15 (*Задача Этьена Безу**). Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При продаже он теряет столько же процентов, сколько стоила ему лошадь. За какую сумму он её купил?

16 Составьте задачу, которую можно решить при помощи уравнения:

а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=2$;

б) $\frac{100}{x}-\frac{4}{x+10}=2$;

в) $\frac{25}{x+3}+\frac{3}{x-3}=2$;

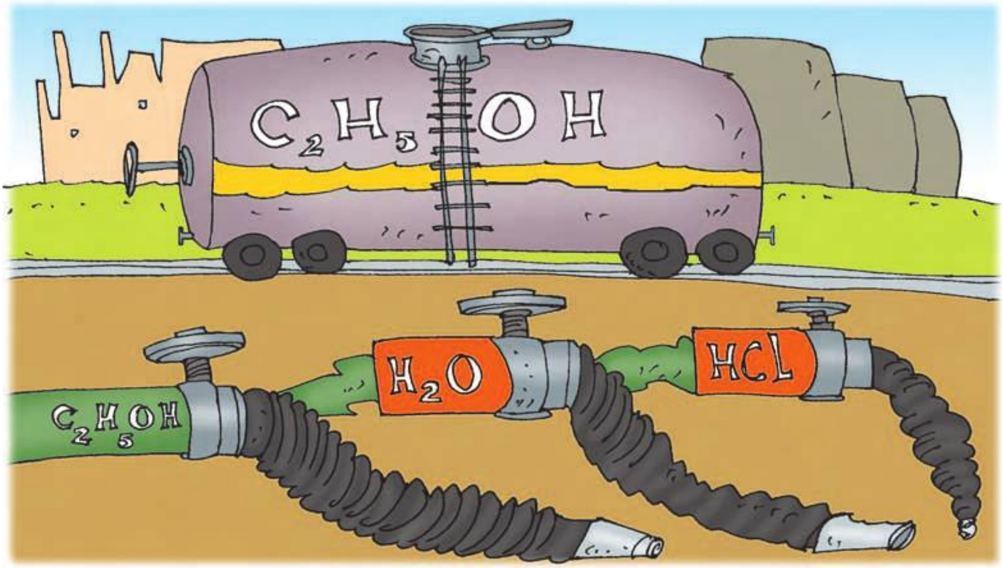
г) $\frac{60}{x+1}+\frac{20}{x-1}=7$.

---

* *Э. Безу* (1730—1783) — французский математик, автор популярного шеститомного учебника «Курс математики».

Исследовательский проект «Возвратные уравнения 4-й степени»
Уравнение 4-й степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ называется *возвратным*. Научитесь решать такие уравнения.

Жизненная задача*
СИТУАЦИЯ. Определение наименьшего времени выполнения заказа.
ВАША РОЛЬ. Следователь.
ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. При расследовании хозяйственной деятельности химического комбината было установлено следующее. Несколько лет назад химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции понадобилось 14 железнодорожных цистерн. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил девять цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Производительность каждого из насосов установить не удалось, известно лишь, что суммарная производительность всех трёх насосов равна шести цистернам в сутки.
ЗАДАНИЕ. Установите, какое наименьшее время могло уйти на перекачивание всей продукции.



* По мотивам задачи, предлагавшейся на вступительных экзаменах по математике на факультете государственного управления Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в 2006 году.

ГЛАВА VI

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

6.1 Статистические характеристики

Знакомимся с новой темой

Во многих ситуациях мы интересуемся некоторой величиной и для её изучения, установления тех или иных закономерностей анализируем набор числовых значений этой величины. Например, метеоролог интересуется дневной температурой воздуха в определённом населённом пункте и анализирует набор из 30 чисел — значений температуры, измеренных в 14 ч 00 мин по местному времени во все дни июня некоторого года. Или школьная медсестра интересуется весом детей, поступивших в первый класс школы, и анализирует набор из 49 соответственных чисел — именно столько ребят приняли в первый класс. Или руководитель промышленного объединения интересуется количеством продукции, выпускаемой каждым из предприятий, входящих в это объединение, за год. Количество таких примеров можно легко умножить.

Вы знаете, что данные могут быть представлены в виде списков, таблиц, диаграмм и т. д.

В любом случае мы имеем для анализа *набор чисел* (иногда говорят также *ряд чисел*). Среди этих чисел могут быть повторяющиеся.

Первая характеристика набора чисел (с ней вы знакомы ещё с четвёртого класса) — это *среднее арифметическое* этих чисел, или просто *среднее*.

Среднее арифметическое набора чисел равно сумме этих чисел, делённой на их количество.

Например, в 8-м классе некоторой школы учится 10 мальчиков, рост которых (в сантиметрах) следующий:

170; 158; 168; 156; 160; 172; 164; 153; 168; 160.

Среднее этого набора чисел (которое естественно назвать средним ростом мальчика этого класса) равно:

$$\frac{170+158+168+156+160+172+164+153+168+160}{10}=\frac{1629}{10}=162{,}9\approx 163\ (\text{см}).$$

Полученная при вычислении среднего арифметического дробь выглядит очень громоздко, поэтому её обычно записывают как произведение дроби $\frac{1}{10}$ на сумму чисел набора, т. е. как

$$\frac{1}{10}\cdot(170+158+168+156+160+172+164+153+168+160).$$

Итак, средний рост равен примерно 163 см.

При вычислении среднего арифметического несущественно, в каком порядке расположены числа набора. Но для более подробного анализа набор чисел полезно упорядочить по возрастанию. Такой набор называют *упорядоченным набором*. Скажем, записав рост восьмиклассников в виде упорядоченного набора, получим:

153; 156; 158; 160; 160; 164; 168; 168; 170; 172.

Теперь хорошо видно, что рост самого низкого восьмиклассника в этом классе равен 153 см, а самого высокого — 172 см. Это важные характеристики набора чисел — наименьшее и наибольшее число в наборе. Вычитая из наибольшего числа наименьшее, мы получим ещё одну важную характеристику — *размах набора*.

В рассматриваемом примере размах равен $172-153=19$ (см). Это значит, что самый высокий из мальчиков этого класса выше самого низкого на 19 см.

Размахом набора чисел называется разность наибольшего и наименьшего чисел этого набора.

Размах набора чисел характеризует, насколько велик разброс чисел в этом наборе, насколько сильно максимальное число отличается от минимального. Во многих ситуациях, например в различных соревнованиях, небольшой разброс показателей означает стабильность результатов. Рассмотрим, к примеру, результаты двух стрелков в серии из 7 выстрелов (записанные в виде упорядоченных наборов чисел):

1-й стрелок: 2; 2; 3; 5; 7; 7; 9. 2-й стрелок: 4; 4; 5; 5; 5; 6; 6.

Среднее 1-го стрелка: $\frac{1}{7}\cdot(2+2+3+5+7+7+9)=\frac{35}{7}=5.$

Среднее 2-го стрелка: $\frac{1}{7}\cdot(4+4+5+5+5+6+6)=\frac{35}{7}=5.$

Мы видим, что средние результаты стрелков равны, но первый стрелок производил и очень плохие выстрелы, и очень хорошие, его результаты нестабильны, а второй стрелок показал почти одинаковые результаты во всех попытках, пусть и средненькие, но стабильные. Это заключение как раз хорошо характеризуется размахом: у первого стрелка он равен 7, а у второго — только 2.

Как вы уже знаете, среднее арифметическое чисел в наборе даёт представление о том, каково среднее число набора. Нахождение среднего даёт ответ на вопрос: «Если бы при той же сумме все числа набора были равны между собой, то какую величину они имели бы?». Иногда среднее набора чисел является не очень удачной характеристикой этого набора, несёт мало информации о нём. Обычно это происходит, если числа набора сильно отличаются друг от друга.

Рассмотрим, к примеру, набор из 5 чисел: 2; 4; 5; 6; 123.

Среднее этого набора равно $\frac{1}{5}\cdot(2+4+5+6+123)=\frac{140}{5}=28$.

Это число сильно отличается от всех чисел набора и не очень информативно. Первые четыре числа значительно меньше среднего, а последнее число сильно превосходит его.

Кроме нахождения среднего арифметического, имеется другой подход к ответу на вопрос, какое число можно было бы считать в некотором (уже другом) смысле средним. Оно так и называется, *серединным числом* набора, или его *медианой* (кстати, это латинское слово в переводе на русский язык значит «средняя»). Попросту говоря, медиана — это число, стоящее посредине набора после его упорядочения.

Скажем, для только что рассмотренного набора (он упорядочен) посредине стоит число 5 — два числа стоят от него слева и два справа. Именно оно и является медианой этого набора. В этом наборе медиана является более удачной характеристикой, чем среднее арифметическое, — действительно, большинство чисел набора близки к 5 (медиане), а не к 28 (среднему).

Но на этом разговор о медиане не кончается. Ясно, что если упорядоченный набор содержит нечётное количество чисел, то среди них имеется число, стоящее ровно посредине. А как быть, если чисел чётное количество? Рассмотрим, скажем, упорядоченный набор из 10 чисел — тот, который встретился в самом первом примере этого параграфа (рост мальчиков-восьмиклассников в сантиметрах):

153; 156; 158; 160; **160**; **164**; 168; 168; 170; 172.

Здесь средних чисел уже два (они выделены синим цветом). В таких случаях медианой считается среднее арифметическое этих двух чисел.

В рассматриваемом примере медиана равна $\frac{160+164}{2}=162$ (см).

Напомним, что среднее этого набора примерно равно 163 см. Здесь, в отличие от предыдущего примера, среднее и медиана довольно близки между собой.

В двух других рассмотренных выше в этом параграфе примерах (результатах двух стрелков) медианы и средние равны между собой. Скажем, в упорядоченном наборе результатов первого стрелка медиана равна 5 (выделена синим цветом):

2; 2; 3; **5**; 7; 7; 9.

Таким образом, подводя итоги, о медиане можно сказать следующее:

Медианой упорядоченного набора чисел называется число, стоящее посредине в этом наборе (если чисел нечётное количество), или среднее арифметическое двух чисел, стоящих посредине в этом наборе (если чисел чётное количество).

Заметим, что медианой произвольного набора чисел называется медиана набора, полученного в результате упорядочивания данного произвольного набора.

Для знакомства с ещё одной характеристикой набора чисел рассмотрим сначала пример. В гастрономе продаётся питьевая вода в бутылках следующего объёма (в литрах):

$$0,2;\ 0,33;\ 0,5;\ 0,6;\ 1;\ 1,5;\ 2.$$

Администратора интересует вопрос: какие из этих бутылок пользуются наибольшим спросом?

Понятно, что для глубокого исследования этого вопроса нужно вести учёт продаж на протяжении продолжительного времени (и об этом мы ещё поговорим в следующем параграфе). Но для начала администратор решил провести экспресс-исследование и вёл учёт продаж на протяжении четверти часа. В результате он получил такой набор из 19 чисел:

$$1;\ 0,33;\ 0,6;\ 0,6;\ 1,5;\ 0,6;\ 0,5;\ 1;\ 0,6;\ 2;\ 0,6;\ 0,33;\ 0,5;\ 1;\ 2;\ 0,2;\ 0,6;\ 1;\ 1,5.$$

В результате упорядочения набор приобрёл вид:

$$0,2;\ 0,33;\ 0,33,\ 0,5;\ 0,5;\ 0,6;\ 0,6;\ 0,6;\ 0,6;\ 0,6;\ 0,6;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1,5;\ 1,5;\ 2;\ 2.$$

Хорошо видно, что наибольшим спросом пользуются бутылки объёмом 0,6 л — их было куплено больше всего (6 покупок). Такое число в наборе (если оно есть) имеет специальное название — *мода*.

Модой набора чисел называется число, встречающееся в этом наборе чаще других.

Мода — самое распространённое, самое «популярное», самое «модное» число набора (так легко запоминать: мода — самое «модное» число набора).

Для нахождения моды не обязательно упорядочивать набор чисел, но в упорядоченном наборе моду находить легче, чем в неупорядоченном.

В наборе может быть несколько мод. Скажем, в самом первом примере данного параграфа (рост мальчиков-восьмиклассников в сантиметрах) упорядоченный набор чисел такой:

$$153;\ 156;\ 158;\ 160;\ 160;\ 164;\ 168;\ 168;\ 170;\ 172.$$

У этого набора две моды: 160 и 168 (каждое из этих чисел встречается по два раза).

Если все числа набора различны, то у такого набора моды нет вообще.

Рассмотренные нами в этом параграфе характеристики набора чисел называются *статистическими характеристиками*. Статистика — наука, занимающаяся сбором, обработкой и анализом данных, чаще всего числовых. С некоторыми элементами статистики вы уже познакомились в 5-м и 6-м классах, а с некоторыми познакомитесь позднее.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.
а) Средним арифметическим набора чисел называется … .
б) Размахом набора чисел называется … .
в) Медианой упорядоченного набора чисел называется … .
г) Медианой произвольного набора чисел называется … .
д) Модой набора чисел называется … .

2 Какая из перечисленных ниже статистических характеристик имеется у любого набора чисел:
а) среднее; в) медиана;
б) размах; г) мода?

3 Известно, что все числа набора являются натуральными. Какая из перечисленных ниже статистических характеристик этого набора обязательно является натуральным числом:
а) среднее; в) медиана;
б) размах; г) мода?

4 Найдите среднее, размах, медиану и моду набора чисел:
а) 6; 8; 8; 8; 8;
б) -5; -5; -3; -3; -1; 1; 1; 1; 5; 5;
в) 2; 2; 2; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 7;
г) -20; -12; -12; -9; -9; -7; -6; 0; 0; 1; 8; 9; 18; 18; 18; 19;
д) 9; 8; 10; 3; 9; 7; 1; 9; 3; 4; 10; 9; 4; 2; 4; 7; 7; 7; 8; 4;
е) 1,1; 1,9; 2,7; 5,1; 6; 6; 6,2; 7,4; 7,9; 8,7;
ж) 1,9; 7,9; 8,7; 6; 2,7; 6,2; 6,1; 1,9; 5,1; 7,4;
з) 14,09; 19,1; 5,12; 1,97; 14,11; 13,52; 9,24; 11,81; 13,99; 9,76; 10,27; 4,06; 2,67; 18,87.

5 В таблице приведены данные об измерениях температуры воздуха в каждый день первой недели мая (измерения проводились в 14:00).

Дата	01.05	02.05	03.05	04.05	05.05	06.05	07.05
Температура, °C	16	16	13	12	13	16	18

а) Какая средняя температура за неделю?
б) Какое значение температуры самое часто встречающееся?
в) С помощью какой статистической характеристики вы отвечали на каждый из предыдущих вопросов?

Н

6 В таблице приведены данные об измерениях объёмов производства железа в России за период 1996—2002 гг.

Год	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Объём производства, млн т	38	39	40	47	51	49	49

а) Сколько в среднем производилось железа в России за указанный период времени?
б) Каков размах производства железа за эти годы?
в) Какова медиана производства железа за этот период?
г) Какова мода производства железа за этот период?

7 В таблице приведены данные по измерению среднего объёма удоя коровы для 6 месяцев на некоторой ферме.

Месяц	январь	февраль	март	апрель	май	июнь
Удой молока, л	7	6,5	7	7,5	8	9,5

а) Сколько молока давала корова в среднем за эти 6 месяцев?
б) Каков разброс объёма среднего удоя с одной коровы на этой ферме?
в) Какова медиана удоя молока за обозначенное время?

8 В березняке измерили диаметр десяти берёз на высоте 1 м и получили следующие данные (в см):

5; 5; 10; 30; 5; 40; 10; 16; 12; 5.

а) Каков средний диаметр берёзы в березняке, судя по приведённым данным?
б) Каков средний возраст берёз в данном березняке, если известно, что в среднем диаметр берёзы увеличивается на 2,5 см в год?
в) Каковы медиана, мода и размах представленного набора чисел?

9 В таблице приведены цифры и количество букв в их русском названии.

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество букв в названии	4	4	3	3	6	4	5	4	6	6

а) Сколько в среднем букв содержит русское название цифры?
б) Какова мода количества букв?
в) Какова медиана количества букв?
г) Чему равен размах количества букв?

10 Сколько различных мод может иметь набор из 10 чисел?

11 У набора чисел нашли среднее и медиану. Может ли медиана быть:
а) меньше среднего; б) больше среднего; в) равна среднему?

12 У набора чисел нашли среднее и моду (которая оказалась единственной). Может ли мода быть:
а) меньше среднего; б) больше среднего; в) равна среднему?

13 У набора чисел нашли медиану и моду (которая оказалась единственной). Может ли мода быть:
а) меньше медианы; б) больше медианы; в) равна медиане?

П

14 К набору чисел добавили ещё одно число, равное медиане этого ряда. Могла ли от этого медиана:
а) увеличиться; б) уменьшиться; в) остаться прежней?

15 К набору чисел добавили ещё одно число, большее медианы этого ряда. Могла ли от этого медиана:
а) увеличиться; б) уменьшиться; в) остаться прежней?

16 Упорядоченный набор содержит n чисел, причём число n — нечётное. Какой номер в этом наборе имеет его медиана?

17 Упорядоченный набор содержит n чисел, причём число n — чётное. Какие номера в этом наборе имеют два числа, средним арифметическим которых является его медиана?

М

18 а) Известно, что у набора из 24 чисел среднее равно 2,5, а сами числа не известны. К набору добавили ещё одно число, равное 4. Можно ли по этим данным найти среднее нового набора? Если нет, объясните почему. Если да, объясните как и найдите.
б) Тот же вопрос для медианы.
в) Тот же вопрос для моды, если известно, что она единственная.

19 Восьмиклассники обсуждали статистические характеристики. Ваня сказал, что мода — это такая характеристика, которая есть не только у наборов чисел, но и у наборов нечисловых данных. Когда его попросили объяснить, что он имеет в виду, он затруднился ответить.
а) Согласны ли вы с Ваней?
б) Если нет, то объясните почему.
в) Если да, то приведите пример такого набора. Есть ли у этого набора среднее? размах? медиана?

6.2 Таблицы частот

Знакомимся с новой темой

В конце предыдущего параграфа мы рассматривали пример экспресс-исследования продаж питьевой воды в бутылках разной ёмкости, проводимого администратором гастронома. В результате был получен набор из 19 чисел, который после упорядочивания имеет следующий вид:

0,2; 0,33; 0,33, 0,5; 0,5; 0,6; 0,6; 0,6; 0,6; 0,6; 0,6; 1; 1; 1; 1; 1,5; 1,5; 2; 2.

Мы уже отмечали, что работать с таким набором не очень удобно, причём с увеличением количества чисел в наборе эти неудобства заметно усиливаются.

Ситуация заметно упростится, если представить данные в виде таблицы.

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Количество купленных бутылок	1	2	2	6	4	2	2

Обратите внимание, если провести более подробное исследование, изучив, скажем, 500 покупок, то соответственная таблица не станет более громоздкой — в ней только увеличатся числа, стоящие в нижней строке. Такая таблица может иметь, например, такой вид.

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Количество купленных бутылок	11	23	82	154	110	76	44

Числа, стоящие в нижней строке, называются *частотами*. Сама такая таблица называется *таблицей частот*. Числа, стоящие в верхней строке таблицы частот, обычно упорядочиваются по возрастанию. Понятно, что сумма всех частот равна количеству чисел в наборе.

С помощью таблицы частот некоторые статистические характеристики набора чисел находить значительно удобнее, чем непосредственно по самому набору.

При нахождении моды нужно найти наибольшую частоту и взять соответствующее этой наибольшей частоте число. Скажем, для каждой из приведённых выше таблиц частот мода равна 0,6. Понятно, что если наибольшее число в строке частот встречается несколько раз, то и мод будет соответственное количество.

При нахождении среднего мы искали сумму всех чисел и делили её на количество чисел. Таблица частот позволяет заменять сумму одинаковых слагаемых произведением каждого такого слагаемого на его частоту.

Таким образом, при нахождении среднего по таблице частот нужно каждое число умножить на его частоту, полученные произведения сложить, а затем разделить на количество чисел в наборе. Совсем формально это правило звучит так: «Среднее равно сумме произведений чисел верхней строки на соответственные числа нижней строки, делённой на сумму частот».

Вычислим средние для каждой из приведённых выше таблиц.

Для первой таблицы:

$$\frac{1}{19}(0,2\cdot 1+0,33\cdot 2+0,5\cdot 2+0,6\cdot 6+1\cdot 4+1,5\cdot 2+2\cdot 2)=\frac{16,46}{19}\approx 0,87.$$

Для второй таблицы:

$$\frac{1}{500}(0,2\cdot 11+0,33\cdot 23+0,5\cdot 82+0,6\cdot 154+1\cdot 110+1,5\cdot 76+2\cdot 44)=\frac{455,19}{500}\approx 0,91.$$

Как видим, средние оказались достаточно близкими числами.

Наконец, правило нахождения медианы по таблице частот следующее. Складываем последовательно частоты слева направо, т. е. берём первую частоту, затем находим сумму первой и второй частот, затем к полученному числу прибавляем третью частоту и т. д. Полученные числа имеют специальное название — *накопленные частоты*. Ясно, что последняя накопленная частота равна количеству чисел в наборе. Когда для решения того или иного вопроса придётся работать с накопленными частотами, то удобно вносить их непосредственно в таблицу частот, добавив для них отдельную строку. Сделаем это, скажем, для второй таблицы (заодно внеся в неё и термин «частота»).

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Частота	11	23	82	154	110	76	44
Накопленная частота	11	34	116	270	380	456	500

Ищем в строке накопленных частот два стоящих рядом числа, левое из которых меньше половины количества чисел в наборе, а правое — больше. Медианой является число из первой строки таблицы, соответствующее большему из этих двух чисел (накопленных частот).

В нашем примере половина количества чисел в наборе — это 250. Накопленная частота числа 0,5 равна 116, а числа 0,6 равна 270. Поскольку $116 < 250$, а $270 > 250$, то медиана равна 0,6.

Обоснование этого правила достаточно понятно. В нашем начальном упорядоченном наборе чисел число 0,6 стоит на местах, начиная со 117-го по 270-е. Количество чисел в наборе чётное, значит, два средних числа в наборе (250-е и 251-е) равны по 0,6. Их среднее арифметическое тоже равно 0,6. А это и есть медиана набора.

Если количество чисел в наборе чётное, то может случиться (хотя это происходит достаточно редко, особенно если чисел в наборе много), что половина количества чисел в наборе равна одной из накопленных частот. В этом случае медиана набора равна среднему арифметическому числа из первой строки таблицы, соответствующего этой накопленной частоте, и числа из первой строки, стоящего справа от него.

Рассмотрим ещё одну таблицу частот с добавленной строкой накопленных частот.

Число	6	7	8	10	12	15	17	18	19
Частота	13	3	7	27	4	11	8	10	17
Накопленная частота	13	16	23	50	54	65	73	83	100

Количество чисел в наборе, для которого составлена эта таблица, равно наибольшей накопленной частоте, т. е. 100. Половина от 100 — это 50, и как раз одна из накопленных частот равна 50. Берём число из первой строки таблицы, соответствующее этой накопленной частоте (это 10), а также число, стоящее справа от него (это 12), и находим их среднее арифметическое. Оно равно $\frac{10+12}{2}=11$. Это и есть медиана данного набора чисел.

Понятно, на чём основано используемое правило. Два средних числа нашего набора — это 50-е и 51-е. Таблица накопленных частот позволяет заключить, что в исходном упорядоченном наборе числа с 24-го по 50-е равны 10, а числа с 51-го по 54-е равны 12. Итак, 50-е число — это 10, а 51-е — это 12.

Вы, наверное, уже обратили внимание, что при нахождении медианы частоты не используются, а используются только накопленные частоты. Накопленные частоты находят применение и при решении многих других вопросов, возникающих в статистике.

Наряду с частотами при обработке данных используются также и *относительные частоты*. Относительная частота числа, входящего в исследуемый набор чисел, равна его частоте, делённой на количество чисел в наборе. При этом, чтобы не возникало путаницы, частоту называют также *абсолютной частотой*.

Сразу отметим, что сумма относительных частот равна единице, поскольку при нахождении этой суммы складываются дроби с одинаковыми знаменателями, а сумма числителей всех этих дробей равна знаменателю. В практических расчётах относительные частоты принято представлять в виде десятичных дробей (лежащих в пределах от 0 до 1). При этом, вычисляя относительные частоты, приходится делать округление до того или иного знака после запятой. В результате ошибки округления могут накапливаться и сумма относительных частот может немного отличаться от единицы. В этом случае увеличивают количество знаков после запятой или изменяют некоторые из относительных частот, увеличивая или уменьшая в них последнюю цифру на 1 так, чтобы новая сумма равнялась единице. Немного ниже мы посмотрим, как это делается.

Во многих ситуациях относительные частоты оказываются удобнее абсолютных. Скажем, если мы хотим сравнить два набора чисел, рассмотренных в самом начале данного параграфа, и добавим к имеющимся таблицам строку относительных частот, то сможем легко ответить на вопросы, ответ на которые по таблице абсолютных частот был бы не сразу очевидным.

Сначала рассмотрим таблицу для набора из 19 чисел, находя относительные частоты с точностью до сотых.

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Абсолютная частота	1	2	2	6	4	2	2
Относительная частота	0,05	0,11	0,11	0,32	0,21	0,11	0,11

Здесь сумма относительных частот равна 1,02. Это произошло в основном из-за того, что четыре раза встречается относительная частота $\frac{2}{19} = 0{,}105263...$ Округление этого числа до сотых, дающее 0,11, является довольно грубым. Можно заменить, например, эти четыре относительные частоты на 0,105, и тогда сумма относительных частот станет равной единице.

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Абсолютная частота	1	2	2	6	4	2	2
Относительная частота	0,05	0,105	0,105	0,32	0,21	0,105	0,105

Теперь рассмотрим таблицу для набора из 500 чисел.

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Абсолютная частота	11	23	82	154	110	76	44
Относительная частота	0,02	0,05	0,16	0,31	0,22	0,15	0,09

Здесь сумма относительных частот оказалась равной единице.

Если бы мы попытались по исходным таблицам понять, в какой из них большим спросом пользуются, например, бутылки ёмкостью 2 л, то для этого пришлось бы проводить дополнительные вычисления. В таблице относительных частот эти вычисления уже проведены, и мы видим, что большим спросом двухлитровые бутылки пользуются в первой таблице — их доля в общем числе продаж составляет примерно 0,105, против доли 0,09 во второй таблице. Довольно часто относительные частоты выражают в процентах. Тогда мы могли бы сказать, что по данным первой таблицы на двухлитровые бутылки приходится 10,5% продаж воды, а по данным второй — 9% продаж.

Для нахождения среднего с помощью таблицы относительных частот нужно каждое число умножить на его относительную частоту и полученные произведения сложить.

Скажем, для второй таблицы получим:

$$0{,}2\cdot 0{,}02+0{,}33\cdot 0{,}05+0{,}5\cdot 0{,}16+0{,}6\cdot 0{,}31+1\cdot 0{,}22+1{,}5\cdot 0{,}15+2\cdot 0{,}09=0{,}9115\approx 0{,}91.$$

До второго знака после запятой этот результат совпадает с полученным ранее (вычисленным с использованием абсолютных частот).

Можно составлять также таблицы *накопленных относительных частот* и находить с их помощью медиану. Разберитесь самостоятельно, как это делать.

На уроках математики в 5-м и 6-м классах вы подробно изучали линейные и столбчатые диаграммы. В статистике их широко используют для наглядного представления данных, причём в основном столбчатые.

Рассмотрим таблицу с результатами тестирования группы из 100 восьмиклассников по математике.

Количество баллов	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество школьников	3	5	7	10	16	23	20	11	5

Понятно, что во второй строке стоят абсолютные частоты. Построим для них столбчатую диаграмму (рис. 35).

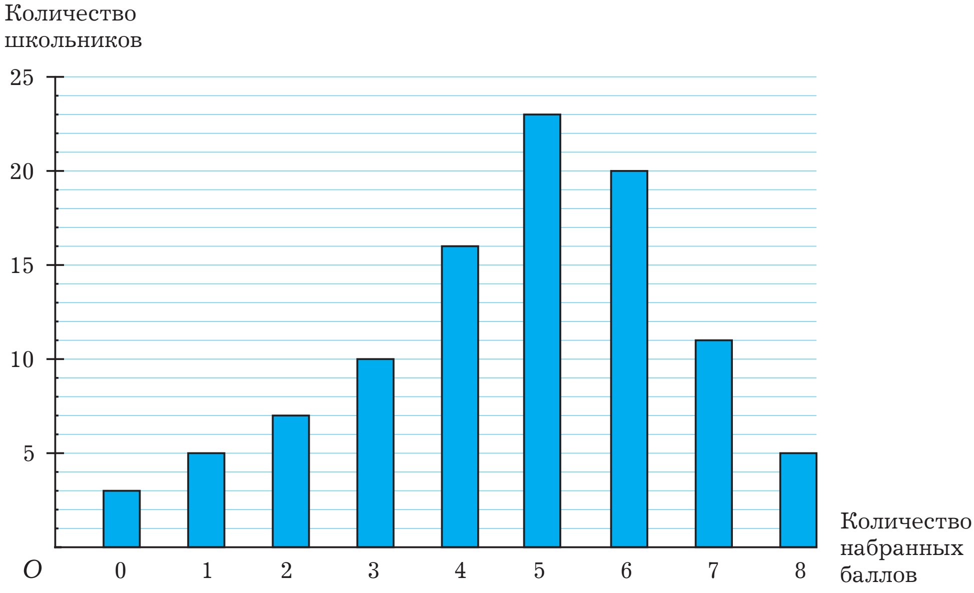


Рис. 35

Из этой диаграммы хорошо видны результаты тестирования в целом, а также есть возможность наглядно рассмотреть интересующие нас детали.

Чтобы сравнить между собой несколько наборов данных, полученных в сходных ситуациях, для них удобно строить совместные диаграммы частот, как правило, относительных. Ещё раз обратимся к уже неоднократно рассмотренному в этом параграфе примеру двух наборов чисел, характеризующих продажи питьевой воды. По полученным ранее таблицам построим для них совместную столбчатую диаграмму относительных частот (рис. 36).

С помощью совместной диаграммы удобно анализировать структуру продаж в каждом из случаев и сравнивать эти случаи между собой по интересующим нас показателям.

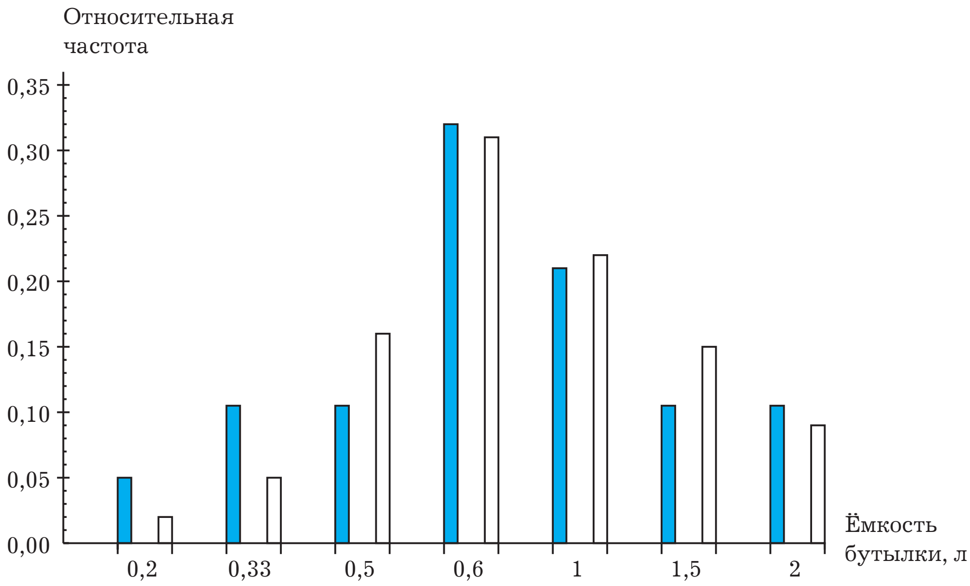


Рис. 36

Развиваем умения

Н

1 1 Закончите предложение.
а) Абсолютной частотой числа, входящего в набор, называется ... .
б) Сумма всех абсолютных частот равна ... .
в) Относительной частотой числа, входящего в набор, называется ... .
г) Сумма всех относительных частот равна ... .

2 Расскажите, приводя примеры, как по таблице абсолютных частот найти:
а) среднее; в) медиану;
б) размах; г) моду.

3 Расскажите, приводя примеры, как по таблице относительных частот найти:
а) среднее; в) медиану;
б) размах; г) моду.

4 Расскажите, приводя примеры, как находится медиана по таблице:
а) накопленных абсолютных частот;
б) накопленных относительных частот.

5 Найдите по таблице частот среднее, размах, моду и медиану.

Количество баллов, набранных на тестировании	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество школьников	2	4	5	7	9	11	12	7	3

Что показывают полученные результаты?

6 Восстановите частоты в таблице, зная накопленные частоты.

Число	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Частота										
Накопленная частота	5	12	21	29	36	44	52	59	65	72

Найдите среднее, размах, моду и медиану.

Н

7 Найдите по таблице относительных частот среднее, размах, моду и медиану.

Число	2	2,4	2,5	2,9	3,2	3,3	3,5	3,7	4
Относительная частота	0,12	0,18	0,05	0,07	0,08	0,11	0,18	0,12	0,09

8 В лотерее 6000 билетов, на каждом из которых напечатаны 6 цифр. Выигрыш зависит от количества совпавших цифр билета с цифрами, выпавшими при розыгрыше. В таблице представлено распределение числа билетов в зависимости от количества совпавших при розыгрыше цифр. Найдите по таблице относительные частоты, накопленные относительные частоты, моду и медиану количества совпавших цифр.

Количество совпавших цифр в билете	0	1	2	3	4	5	6
Количество билетов	1312	2181	1525	518	364	80	20

9 Игральную кость подбросили 300 раз. В таблице представлено, сколько раз выпало каждое возможное количество очков. Найдите по таблице среднее количество очков за одно бросание, а также относительные частоты и накопленные относительные частоты.

Количество очков	1	2	3	4	5	6
Количество выпадений	52	45	58	60	34	51

10 В таблице представлены результаты продаж мужской обуви в некотором магазине за один день. Найдите средний размер купленной обуви, медиану и моду.

Размер обуви	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Количество мужчин	3	16	23	24	27	12	21	41	30	16	17	4	2

11 Постройте по таблице столбчатую диаграмму.

Число	11	12	13	14	15	16	17
Абсолютная частота	5	16	7	5	13	18	11

12 Восьмиклассники написали контрольную по математике. Постройте по таблице столбчатую диаграмму.

Отметка	1	2	3	4	5
Количество восьмиклассников	1	3	10	8	4

13 Составьте по диаграмме (рис. 37) таблицу.

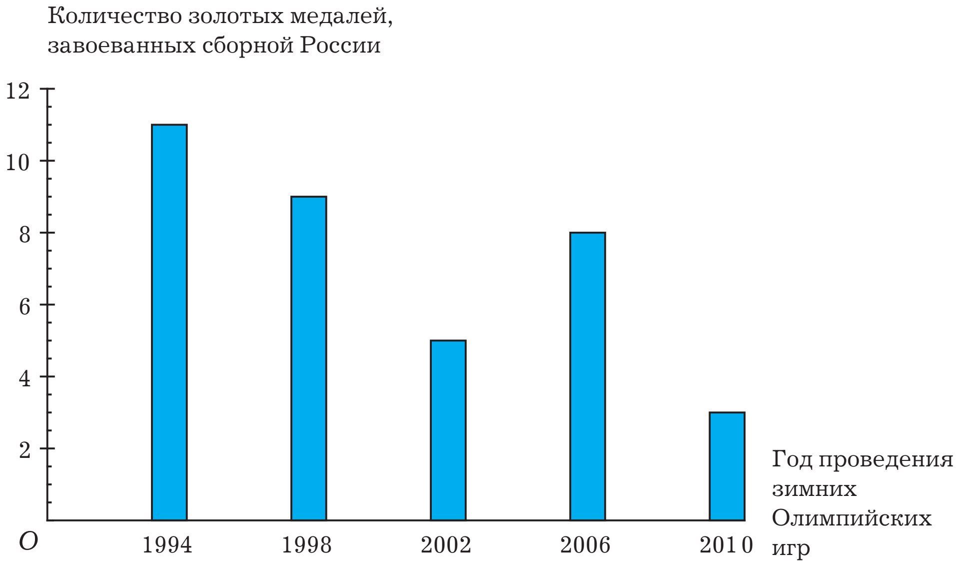


Рис. 37

П

14 Приведите пример набора чисел, где медиана является более удачной характеристикой набора, чем среднее арифметическое, и приведите пример, где наоборот.

15 Приведите пример набора чисел, где мода является более удачной характеристикой набора, чем среднее арифметическое, и приведите пример, где наоборот.

16 Приведите пример набора чисел, где мода является более удачной характеристикой набора, чем медиана, и приведите пример, где наоборот.

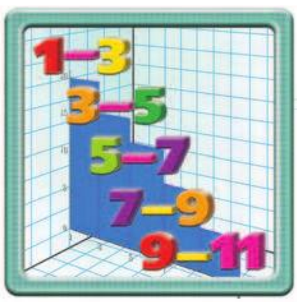
17 В некоторой компании проанализировали окончания фамилий девушек-сотрудниц в течение трёх последовательных лет. По представленной таблице постройте совместную столбчатую диаграмму относительных частот и совместную столбчатую диаграмму абсолютных частот.

Окончание	«ова»	«ева»	«ина»	«ко»	«кая»
2008 г.	28	16	10	6	2
2009 г.	34	13	13	2	0
2010 г.	45	12	20	4	8

М

18 Как вы думаете, какой метод нахождения среднего даёт меньшую погрешность — с помощью абсолютных или относительных частот? Обоснуйте свой ответ.

6.3 Понятие об интервальном методе



Знакомимся с новой темой

В предыдущем параграфе мы работали с различными таблицами частот и убедились, что такая работа может быть очень полезной и плодотворной. Однако встречаются такие наборы чисел, для которых таблицы частот почти бесполезны. Обратимся, скажем, к примеру, рассмотренному в начале параграфа 6.1. Измерив рост 10 мальчиков-восьмиклассников, получили следующий упорядоченный набор чисел:

153; 156; 158; 160; 160; 164; 168; 168; 170; 172.

Диаграмма абсолютных частот для него имеет следующий вид.

Рост мальчика	153	156	158	160	164	168	170	172
Абсолютная частота	1	1	1	2	1	2	1	1

Видно, что абсолютные частоты не несут почти никакой информации о рассматриваемом наборе чисел. Встречаются и такие наборы, где все абсолютные частоты равны единице.

В таких случаях для анализа данных применяют *интервальный метод*. Его суть заключается в следующем. Найдя размах набора, его делят на несколько равных частей (обычно от 5 до 12) и с полученным шагом, начиная с наименьшего числа в наборе, определяют диапазоны (или интервалы) изменения чисел. Иногда, для упрощения работы, длину шага округляют нужным образом или диапазоны отсчитывают не от наименьшего числа в наборе, а от удобного числа, ещё немного меньшего (ясно, что оно не входит в набор). После этого определяют, сколько чисел исследуемого набора попало в каждый интервал (если число совпадает с границей двух соседних интервалов, то его обычно включают в левый из них). Эти числа называются *абсолютными интервальными частотами*. Деля абсолютные интервальные частоты на количество чисел в наборе, мы получим *относительные интервальные частоты*.

Предположим, в результате описанной выше обработки некоторого набора, содержащего 70 чисел, получена следующая таблица абсолютных интервальных частот (для краткости, когда это не приводит к неясностям, может быть опущено слово «интервальная», а иногда и слово «абсолютная»).

Интервал	1—3	3—5	5—7	7—9	9—11	11—13	13—15
Частота	20	16	13	9	5	4	3

Для наглядного представления информации, содержащейся в интервальной таблице частот, строят специальные фигуры, называемые *гистограммами*.

Гистограмма — это ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, основаниями которых являются рассматриваемые интервалы, а высотами — абсолютные или относительные частоты.

Бывает, таким образом, гистограмма абсолютных частот и гистограмма относительных частот. Ясно, что они отличаются одна от другой лишь масштабом вдоль вертикальной оси.

Построим гистограмму абсолютных частот для приведённой выше таблицы (понятно, что частоты, указанные в этой таблице, — абсолютные) (рис. 38).

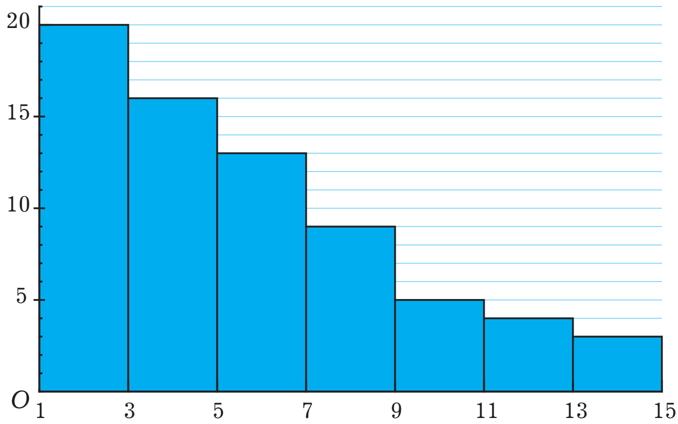


Рис. 38

Для дальнейшей работы с таблицей интервальных частот применяют следующий приём: считают, что все числа, попавшие в каждый интервал, равны между собой и равны числу, являющемуся серединой этого интервала. Конечно, это предположение приведёт к тому, что все дальнейшие результаты будут получаться приближёнными. С первого взгляда, кажется, что этот метод очень грубый и погрешность будет весьма большой. Однако массовое применение метода на практике показало, что его погрешность не так велика — ведь в интервале имеются числа, лежащие как левее, так и правее его середины, и погрешности в среднем более или менее уравновешиваются.

Обычно строку середин интервалов добавляют к интервальной таблице выше строки интервалов. Иногда строят новую таблицу.

Мы пойдём первым путём, причём добавим к приведённой выше таблице не только строку середин интервалов сверху, но и строку относительных интервальных частот снизу.

Середина интервала	2	4	6	8	10	12	14
Интервал	1—3	3—5	5—7	7—9	9—11	11—13	13—15
Абсолютная частота	20	16	13	9	5	4	3
Относительная частота	0,29	0,23	0,18	0,13	0,07	0,06	0,04

Найдём среднее, пользуясь относительными частотами:

$$2\cdot 0{,}29+4\cdot 0{,}23+6\cdot 0{,}18+8\cdot 0{,}13+10\cdot 0{,}07+12\cdot 0{,}06+14\cdot 0{,}04=5{,}6\approx 6.$$

Поскольку интервалы и их середины известны нам с точностью до целых, среднее тоже было округлено до целых.

Развиваем умения

Н

1 Закончите предложение.
а) Абсолютной интервальной частотой называется ... .
б) Сумма всех абсолютных интервальных частот равна ... .
в) Относительной интервальной частотой называется ... .
г) Сумма всех относительных интервальных частот равна ... .
д) Гистограммой называется ... .

2 Расскажите, как по интервальной таблице относительных частот найти среднее.

3 Расскажите, как по набору чисел и заданному количеству интервалов строится интервальная таблица частот.

4 По данным таблицы постройте гистограмму количества землетрясений, произошедших на Земле в период с 2000 по 2011 г.

Магнитуда землетрясения	Количество землетрясений
0,1—0,99	259
1—1,99	7141
2—2,99	53 618
3—3,99	82 891
4—4,99	120 095
5—5,99	19 091
6—6,99	1719
7—7,99	163
8—8,99	5

Н

5 По данным тестирования был определён коэффициент интеллекта (IQ) 1000 человек. Результаты исследования приведены в таблице.

Величина IQ	0—40	40—80	80—120	120—160	160—200
Относительная частота	0,018	0,09	0,73	0,15	0,012

По данным таблицы постройте гистограмму.

6 По данным таблицы распределения дубов по диаметру на высоте 1 м в некотором подмосковном лесу найдите среднее значение их диаметра.

Диаметр, см	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70
Частота	52	156	220	138	94	7	18

7 По данным таблицы распределения массы арбузов на бахче найдите среднюю массу арбуза.

Масса арбуза, кг	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25
Относительная частота	0,07	0,23	0,41	0,19	0,1

П

8 При измерении роста 40 девочек-восьмиклассниц были получены следующие результаты (в сантиметрах):

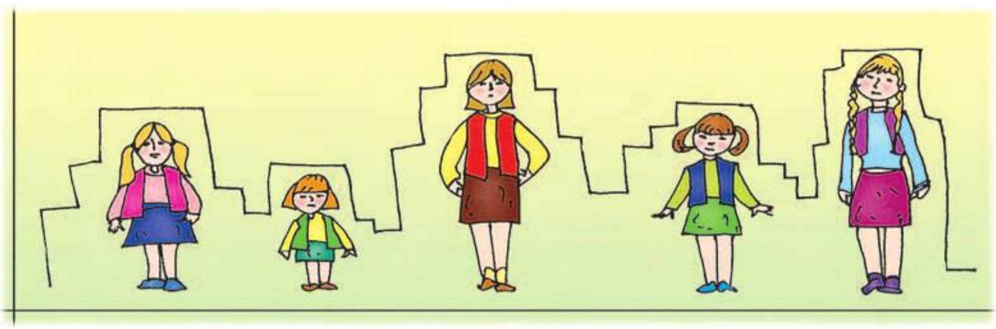
161; 159; 162; 165; 155; 159; 165; 161; 163; 158; 161; 169; 148; 158; 166; 158; 154; 163; 157; 163; 158; 150; 172; 156; 157; 155; 160; 163; 156; 157; 167; 166; 154; 157; 164; 153; 157; 158; 154; 158.

Начертите в тетради две такие же таблицы интервальных частот (с разным шагом), заполните их и постройте с их помощью гистограммы абсолютных частот.

Рост	148—154	154—160	160—166	166—172
Частота				

Рост	148—152	152—156	156—160	160—164	164—168	168—172
Частота						

Сравните полученные гистограммы. Какие выводы вы можете сделать?



9 По данным каждой из таблиц предыдущей задачи найдите средний рост восьмиклассницы. Найдите также средний рост по данным начального набора чисел. Сравните три полученные величины.

М

10 Имеется набор чисел:

4,3;	9,2;	10,2;	4,4;	4,7;	8,9;	4,3;	2,4;	4,8;	3,0;
10,1;	8,9;	4,2;	8,6;	3,1;	5,6;	3,1;	3,7;	5,6;	11,2;
4,7;	9,4;	9,8;	10,4;	6,2;	7,7;	10,5;	11,8;	9,2;	10,2;
4,6;	8,9;	11,2;	4,4;	7,7;	9,8;	9,7;	5,6;	1,6;	5,6;
3,4;	4,2;	9,9;	10,4;	6,7;	8,5;	10,4;	10,2;	4,0;	9,9;
4,8;	7,5;	7,9;	5,1;	3,8;	11,7;	5,9;	3,3;	7,7;	10,5.

Для заданного набора:
а) запишите упорядоченный набор;
б) найдите наименьшее и наибольшее число в наборе;
в) найдите размах;
г) взяв для дальнейшей работы количество интервалов равным 6, определите шаг интервала;
д) постройте интервальную таблицу частот (абсолютных и относительных);
е) постройте гистограмму абсолютных частот;
ж) найдите среднее;
з) постройте таблицу накопленных относительных интервальных частот;
и) найдите медиану;
к) придумайте, как можно найти медиану по гистограмме.

Проект «Опрос общественного мнения с последующей обработкой результатов»

Проведите среди учащихся вашего класса или вашей школы опрос на интересующую многих ребят тему. Подготовьте по результатам опроса компьютерную презентацию, включив в неё нужную, по вашему мнению, информацию: числовые характеристики, таблицы, диаграммы и т. д. Сделайте выводы по результатам обработки данных опроса.

Исследовательский проект «Среднее двух числовых наборов»

Имеется два числовых набора, причём среднее первого набора больше среднего второго набора. При этом среднее этих двух чисел равно среднему набора, полученного объединением первоначальных наборов в один. В каком из первоначальных наборов больше чисел?

Жизненная задача

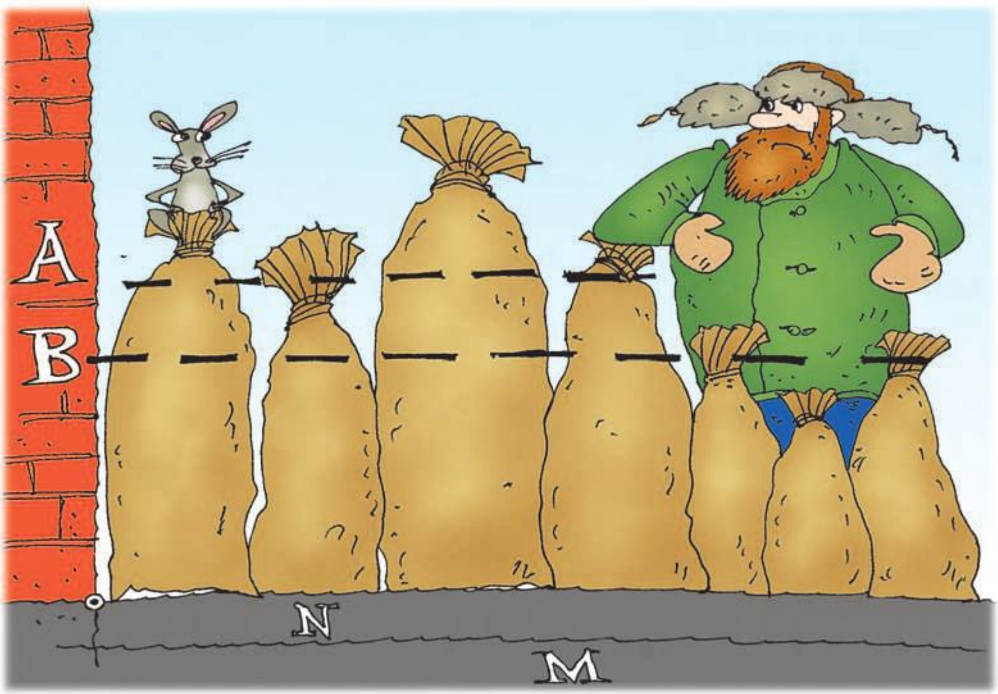
СИТУАЦИЯ. Мониторинг среднего значения.

ВАША РОЛЬ. Исследователь.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Определяется среднее значение некоторой величины. При этом время от времени поступают новые результаты измерений, и среднее значение приходится определять снова, с учётом как уже имеющихся результатов измерений, так и вновь поступивших.

ЗАДАНИЯ

1) Предположим, что среднее значение было определено по результатам n измерений и равно a. Поступил результат ещё одного измерения, который равен b. Обязательно ли для определения среднего значения результатов $n+1$ измерения нужно находить сумму $n+1$ числа (n прежних и одного нового) и делить её на $n+1$ или можно найти его проще?
2) Придумайте, как определить среднее значение результатов $n+1$ измерения, зная лишь три числа: n, a и b. Запишите соответствующую формулу.
3) Предположим, что среднее значение было определено по результатам n измерений и равно a, а затем нашли среднее значение результатов m новых измерений, и оно равно b. Придумайте, как определить среднее значение результатов $n+m$ измерений, зная лишь четыре числа: n, a, m и b. Запишите соответствующую формулу.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

К главе I Рациональные алгебраические выражения

1 Определите, при каких значениях букв выражение не имеет смысла:

а) $\dfrac{5x+7}{6x-4}$; б) $c-\dfrac{c+3}{c-3}$; в) $\dfrac{q}{q+1}+\dfrac{q+1}{q+2}+\dfrac{q+2}{q+3}$.

2 Определите, при каких значениях букв выражение имеет смысл:

а) $\dfrac{m+n+k}{8m+17}$; б) $\dfrac{ar-5rl}{9l-7}$; в) $\dfrac{t-9}{t^2}-\dfrac{t^2}{t+9}$.

3 Запишите алгебраическое выражение, с помощью которого находится:

а) цена карандаша, если r карандашей стоит R рублей;

б) доля меди в её сплаве с оловом, если в образце сплава массой M кг масса олова составляет m кг.

4 Приведите дроби к указанным знаменателям:

а) $\dfrac{1}{cp-5c^3p}$ к знаменателю $5c^3p^2-cp^2$;

б) $\dfrac{h+2}{h-3}$ к знаменателю $(h-3)^3(h+1)$.

5 Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)^4}$; в) $\dfrac{u^3-v^3}{5u^2h+5uhv+5hv^2}$;

б) $\dfrac{5xy+2yz}{25x^2-4z^2}$; г) $\dfrac{u^3+v^3}{(tu+tv)^2-3t^2uv}$.

6 Упростите выражение:

а) $\dfrac{4q^2-25R^2}{25pR-10pq+4q^2-10Rq}$; б) $\dfrac{-2x+4}{-x^2+4x-4}$.

7 Сократите дробь:

а) $\dfrac{8gu^5v-8g^5uv^5}{(u+vg)^4-(u-vg)^4}$; б) $\dfrac{l^2(l+1)(l+3)+2l(l+1)(l+3)}{l^4+4l^3+l^2-6l}$.

8 Сократите дробь:

а) $\dfrac{k^3-l^3-m^3+k^2l-kl^2+k^2m+l^2m-km^2+lm^2+2klm}{-k^3-l^3-m^3+k^2l+kl^2+k^2m+l^2m+km^2+lm^2-2klm}$;

б) $\dfrac{a^{15}+2a^{12}b^3+a^9b^6-a^7}{a^{15}-2a^8b^3-a^9b^6-a^7}$.

9 Найдите сумму и разность дробей:

а) $\dfrac{9l^4m^3}{-lm^4-4l^4m^5}$ и $\dfrac{2l^3m^5}{-lm^4-4l^4m^5}$; б) $\dfrac{x+y+z}{x+y-z}$ и $\dfrac{-x-y+z}{x+y-z}$.

10 Найдите общий знаменатель дробей:

а) $\dfrac{z^2-z}{z^3+z}$ и $\dfrac{z^2+z}{z^4-z^2}$; б) $\dfrac{i+j+k}{ij(k+1)}$ и $\dfrac{i+j-k}{i(j+1)(k+1)}$.

11 Выполните действия:

а) $\dfrac{-20-7a}{-56d-16w}+\dfrac{-c-3p}{7d+2w}$;

б) $\dfrac{5m+7n}{8l^3s^2}-\dfrac{10a+4w}{5ls^6}$;

в) $\dfrac{2p-3q}{pq(p+q)}+\dfrac{3p+2q}{p^2q(p+q)}$;

г) $\dfrac{9y+3g}{12gl+8ly}-\dfrac{14y}{12gk+8ky}$;

д) $\dfrac{3h+5m}{20d-40r}+\dfrac{-3a-9v}{-12d+24r}$;

е) $\dfrac{6c-4t}{3z}+\dfrac{c+t}{7z^4r^5}$;

ж) $\dfrac{d}{2d^5w^3-2w}+\dfrac{w}{2d^5w^3+2w}$;

з) $\dfrac{5u+9v}{-5dx-9tx}+\dfrac{10m-7j}{30dz+54tz}$.

12 Представьте выражение в виде дроби:

а) $\dfrac{2u}{2u^2-2u-v+uv}+\dfrac{u+v}{(2u+v)(u+1)}$;

б) $\dfrac{\frac{5}{2}p-\frac{27}{14}}{7p-3}+\dfrac{\frac{1}{7}p+\frac{15}{343}}{p^2-\frac{9}{49}}-\dfrac{\frac{5}{2}p+\frac{11}{7}}{7p+4}$;

в) $\dfrac{a+b}{a+a^2+b+ab}-\dfrac{a-b}{(a+b)^2}$;

г) $\dfrac{2z-\frac{48}{5}}{z^2-36}+\dfrac{z-\frac{6}{5}}{z-1}-\dfrac{z+\frac{39}{5}}{z+6}$.

13 Найдите алгебраическую сумму дробей:

а) $\dfrac{(xyz)^2}{x+y+z}+\dfrac{x+y+z-x^3y^2z^2-x^2y^3z^2}{(x+y)(x+y+z)}$;

б) $\dfrac{k^2+kl+l^2}{k^2-kl+l^2}-\dfrac{k^4+2k^3l+l^2(l^2-1)+k^2(3l^2-1)+k(l+2l^3)}{k^4+k^2l^2+l^4}$;

в) $\dfrac{ax+by}{(a-b)(x+y)}+\dfrac{ay-bx}{(a+b)(x-y)}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

г) $\dfrac{1}{k+l}+\dfrac{1}{k^2+l^2}+\dfrac{kl^2(1+l)+k^2(l-2l^2)-k^4+k^3l-l^4}{(k^2+l^2)(k^3+l^3)}$.

14 Упростите выражение:

а) $\dfrac{2g-5s-f}{2g+5s-f}-\dfrac{f+f^2-2g-4fg+4g^2-5s+10fs-20gs+25s^2}{f^2-4fg+4g^2-25s^2}$;

б) $\dfrac{1}{a^4b^4}+\dfrac{1}{1+a^4b^4}+\dfrac{1-2a^8b^4-2a^4b^8}{(a^4+b^4)(a^4b^4+a^8b^8)}$;

в) $\dfrac{u+v-w}{(u+v+w)^2}-\dfrac{(u+v)^2(2u+2v-1)-(1+6u+6v)w^2}{(u+v+w)(u+v-w)(u^2+2uv+v^2-w^2)}+\dfrac{u+v+w}{(u+v-w)^2}$;

г) $\dfrac{1}{x+y+z+t}-\dfrac{(t+x+y+z)(xy+tz)}{tx^2y+t^2xz+xy^2z+tyz^2}+\dfrac{x+y+z+t}{xt+yz}$.

15 Найдите произведение дробей:

а) $\dfrac{7m^3z}{4a^2uc^3}$ и $\dfrac{a^2u}{14c^3m^2z}$;

б) $\dfrac{8y-6p}{7f+2y}$ и $\dfrac{0,5(y+p)}{7f-2y}$.

16 Найдите частное дробей:

а) $\dfrac{5m^2}{4vx}$ и $\dfrac{5m^2-1}{4vx^2}$;

б) $\dfrac{3p^2x^3}{2r^3}$ и $\dfrac{3p^2x}{5r^2}$.

17 Выполните действия:

а) $-\dfrac{2e^3}{s^3}:\dfrac{4}{9y^2}\cdot\left(-\dfrac{4d^2s^3}{9e^3y^2}\right)$;

б) $\dfrac{3r^2p^5}{7q^3t^4}:\dfrac{9r^3p^7}{12q^2t^6}$;

в) $\dfrac{4}{3}:\dfrac{5g^2}{8m}\cdot\dfrac{15g^2t^2}{16m}$;

г) $\left(-\dfrac{7x}{9z^3}\right):\left(-\dfrac{3}{2y}\right)$.

18 Выполните указанные действия:

а) $\dfrac{f^3+g^3}{f^3-g^3}:\dfrac{f+g}{f-g}\cdot\dfrac{f^2+fg+g^2}{f^2-fg+g^2}$;

б) $\dfrac{a^3-7ab^2+6b^3}{a^3-2a^2b-5ab^2+6b^3}\cdot\dfrac{a-3b}{a+3b}$;

в) $\dfrac{cd+1}{cd-1}:\dfrac{cd-d}{cd+d}\cdot\dfrac{1-c-cd+c^2d}{1+c+cd+c^2d}$;

г) $\dfrac{(i+j)^3+(i-j)^3}{(i+j)^3-(i-j)^3}:\dfrac{i}{3i^2+j^2}$.

19 Выполните умножение и деление дробей:

а) $\dfrac{h^2-4z^2}{2h^2-9hz+9z^2}\cdot\dfrac{2h^2-5hz+3z^2}{h^2+3hz+2z^2}\cdot\dfrac{h^2-2hz-3z^2}{h^2-hz-2z^2}$;

б) $\dfrac{u^6-v^6}{u^3-uv+2u^2v-2v^2}\cdot\dfrac{u^3+2v^2-uv-2u^2v}{u^2-v^2}\cdot\dfrac{u^2+uv-2v^2}{u^4+u^2v^2+v^4}$;

в) $\dfrac{4n^2-10np+12ny-15py+9y^2}{6n^2+6np+13ny+9py+6y^2}\cdot\dfrac{3np+3p^2+3ny+5py+2y^2}{2np-5p^2-2ny+8py-3y^2}$;

г) $\dfrac{ik+jk+k^2+il+jl+kl+im+jm+km}{ik+jk-k^2+il+jl-kl+im+jm-km}:$

$:\dfrac{ik+jk+k^2-il-jl-kl+im+jm+km}{ik+jk-k^2+il+jl-kl-im-jm+km}$.

20 Упростите выражение:

а) $\left(q+\dfrac{q+1}{q^3}\right):\left(q+\dfrac{1+q+q^3}{q^3-q^2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{i^2+i}{i^2-i}+\dfrac{i}{i+1}\right):\left(\dfrac{i^2}{i-1}+\dfrac{i^3}{1-i^2}\right)$;

в) $\left(u-\dfrac{u-5}{u+5}\right)\left(u-\dfrac{u^3-1+5u+4u^2}{5+4u+u^2}\right)$;

г) $\left(\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{1}{s+2}\right)\left(\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{s-1}{1+s}\right)$.

21 Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{2a+c}{a+2c}-\dfrac{a-c}{a+2c}\right)\left(\dfrac{a-c}{a-2c}+\dfrac{2a}{a+2c}\right)$;

б) $\left(\dfrac{m+\dfrac{1}{m}}{m-\dfrac{1}{m}}+\dfrac{m}{1+m}\right)\left(\dfrac{m+1}{m}-\dfrac{2+m-m^2}{m}\right)$;

в) $\left(\dfrac{u^2}{u^2+1}-\dfrac{u^3}{u^3+1}+\dfrac{u^2}{u^4+1}\right):\dfrac{2-u+u^2+u^3+u^4}{1+u^2+u^3+u^5}$;

г) $\left(\dfrac{z+\dfrac{1}{z}}{z-\dfrac{1}{z}}-\dfrac{z+\dfrac{2}{z}}{z-\dfrac{2}{z}}+\dfrac{z+\dfrac{3}{z}}{z-\dfrac{3}{z}}\right):\dfrac{6-z^2-2z^4+z^6}{(z^2-3)(z^2-2)}$.

22 Докажите тождество:

а) $\dfrac{k^3-k^2-k-1}{k^3-k^2+k-1}-\dfrac{k^3+k^2-k+1}{-k^3+k^2-k+1}=\dfrac{2k(1+k)}{1+k^2}$;

б) $\left(\dfrac{x+y}{x-y+1}-\dfrac{x+y}{x+y+1}\right)\left(\dfrac{1+x-y}{x+y}-\dfrac{1+x-y}{x-y}\right)=\dfrac{4y^2}{(y-x)(1+x+y)}$;

в) $\dfrac{w+W-1}{w+w^2+W+2wW+W^2}-\dfrac{2-2w-2W}{(w+W)(w^2+2wW+W^2-1)}=\dfrac{1}{w+W}$;

г) $\dfrac{m^6+m^5n+m^3n^2+m^2n^3}{-m^6+m^5n-m^3n^2+m^2n^3}:\dfrac{-m^6-m^5n+m^3n^2+m^2n^3}{-m^6+m^5n-m^3n^3+m^2n^4}=\dfrac{n^3+m^3}{n^2-m^3}$.

23 Найдите значение выражения:

а) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^{-15}\cdot\left(\dfrac{7}{4}\right)^{-16}$;

б) $(2{,}5)^{-5}\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^{7}$;

в) $\dfrac{2^{20}\cdot 4^{-9}}{8^{-3}\cdot 16^{2}}$;

г) $\dfrac{12^{-40}}{6^{-41}\cdot 2^{-42}}$.

24 Найдите степень дроби:

а) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-4}$; б) $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^{-3}$; в) $\left(-\dfrac{14}{15}\right)^{-2}$; г) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-6}$.

25 Выполните действия:

а) $\left(e^2h^2u^2\right)^{-8}$;

б) $(2tz)^{-10}$;

в) $\left(-8d^5x^4z^{-5}\right)^{-2}$;

г) $\left(c^{-2}e^2x^{-2}z^5u^{-3}\right)^{-5}$.

26 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{5^{-7}\cdot 2^{-8}}{10^{-5}}$; б) $\dfrac{3^{-20}\cdot 9^{-33}}{27^{-33}\cdot 81^{3}}$; в) $\dfrac{7^{-25}\cdot 49^{-52}}{49^{-35}\cdot 7^{-60}}$; г) $\dfrac{3^{-14}\cdot 5^{-14}}{225^{-6}\cdot 45^{-2}}$.

27 Используя степени, запишите в виде суммы разрядных слагаемых число:

а) 3,079;

б) 0,00006201;

в) 50 094,58;

г) 70,000707;

д) 78 003,09;

е) 8490,802.

28 Запишите число, заданное с помощью суммы разрядных слагаемых:

а) $3\cdot 10^3+6\cdot 10^2+3\cdot 10+7\cdot 10^{-1}+9\cdot 10^{-3}$;

б) $7\cdot 10^4+7\cdot 10^3+2\cdot 10^{-1}+6\cdot 10^{-4}$;

в) $4\cdot 10^5+7\cdot 10^4+3\cdot 10+3\cdot 10^{-2}+6\cdot 10^{-3}$;

г) $5\cdot 10^2+5\cdot 10+6\cdot 10^{-2}+7\cdot 10^{-3}+8\cdot 10^{-4}$.

29 Запишите в виде целого числа или десятичной дроби:

а) $7{,}2\cdot 10^{-4}$;

б) $6{,}8244\cdot 10^{-2}$;

в) $3{,}07\cdot 10^{-3}$;

г) $8{,}4\cdot 10^{-6}$.

30 Упростите выражение:

а) $\left(k-k^{-1}\right)^{-3}-\left(k+k^{-1}\right)^{-3}$;

б) $\dfrac{u^3v^3\left(u^{-3}-v^{-3}\right)}{(u-v)\left(u^2+uv+v^2\right)}$.

31 Упростите выражение:

а) $\dfrac{\left(h-g^{-1}\right)^{-1}\left(h-2g^{-1}\right)^{-1}}{\left(h-3g^{-1}\right)^{-1}\left(h-4g^{-1}\right)^{-1}}-\dfrac{\left(h-3g^{-1}\right)^{-1}\left(h-2g^{-1}\right)^{-1}}{\left(h-g^{-1}\right)^{-1}\left(h-4g^{-1}\right)^{-1}}$;

б) $\dfrac{(ab^2)^{-1}+\dfrac{a^{-2}}{b}+\dfrac{c^{-1}}{a^2}+\dfrac{b^{-2}}{c}+\left(\dfrac{abc}{2}\right)^{-1}+da^{-1}b^{-2}c^{-1}+\dfrac{da^{-2}}{bc}}{\dfrac{b^{-2}}{a}+\dfrac{b^{-1}}{a^2}-\dfrac{a^{-2}}{c}+(b^2c)^{-1}-\left(\dfrac{ab^2c}{d}\right)^{-1}-\dfrac{d(bc)^{-1}}{a^2}}$.

К главе II Понятие о функциях

1 а) Что такое функция?
б) Какая переменная называется зависимой, а какая независимой?
в) Что такое аргумент функции?
г) Что такое область определения функции и как её найти?

2 Укажите независимую и зависимую переменные, аргумент и область определения функции:

а) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2-1}$;

б) $q=\dfrac{1}{p^6-4p^4+4p^2}$;

в) $h=\dfrac{t+2}{t^3-2t+t^2}$;

г) $z=\dfrac{w}{w}-\dfrac{w+1}{w+1}+\dfrac{w+2}{w+2}-\dfrac{w+3}{w+3}$.

3 На стройке в Нью-Йорке (США) первого в истории небоскрёба Эмпайр-стейт-билдинг, высота которого 381 м (102 этажа), на протяжении 464 дней трудились 3400 рабочих. Предполагая, что здание строилось равномерно, запишите формулы, выражающие зависимость от времени t высоты здания, а также доли выполненной работы. Постройте графики полученных зависимостей на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 500$, если считать, что момент $t=0$ соответствует началу строительства и t измеряется в днях. Постройте также график зависимости от времени количества уже полностью построенных этажей.

4 Функция задана формулой $y=\dfrac{x}{x^2+x+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot x$. Найдите её значение для значения аргумента, равного 1; -1; 2; $\dfrac{1}{2}$; 4; -3.

5 Для функции, заданной формулой $m=\dfrac{11k+3}{17}$, определите, при каком значении аргумента она принимает значение: $\dfrac{3}{17}$; $\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{53}{136}$; $\dfrac{14}{17}$; 6; 0,6.

6 Для функции $y=g(x)$ запишите с помощью математических символов утверждение: значение функции от аргумента, представляющего собой значение функции от аргумента x^2, равно значению функции от аргумента, равного величине, обратной значению функции от аргумента $2x$.

7 Пусть $m(x)=x^2-x$, $w(x)=\dfrac{1}{x+1}$. Найдите:

а) $m(w(x))$;

б) $w(m(x))$;

в) $2w\left(\dfrac{w(x)+m(x)}{w(x)-m(x)}\right)$;

г) $m\left(a-w\left(\dfrac{1-x}{x}\right)\right)-m(x)$.

8 а) Что такое график функции?

б) Как с помощью графика найти значение функции при некотором значении аргумента?

в) Как с помощью графика установить, при каких значениях аргумента функция принимает данное значение?

г) Как построить график функции, заданной формулой?

д) Как определить, что некоторая линия представляет собой график некоторой функции?

9 Даны функции: $f=\dfrac{5x+3}{5x-4}$; $g=\dfrac{5x+2}{5x-5}$; $h=\dfrac{5x+7}{5x-8}$. Установите, графикам каких из этих функций принадлежат точки: $\left(\dfrac{1}{10};\ -1\right)$, $\left(\dfrac{19}{40};\ -\dfrac{5}{3}\right)$, $\left(7;\ \dfrac{38}{31}\right)$, $\left(7;\ \dfrac{38}{31}\right)$, $\left(2;\ \dfrac{17}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{11}{10}\right)$.

10 С помощью графика, изображённого на рис. 39, определите:

а) значение y, если значение x равно -4; -8; 2,5; 0;

б) значение x, если значение y равно 7; 3,5; -3; $-6{,}5$;

в) $y(-1{,}5)$; $y(-3)$; $y(4{,}5)$;

г) значение x, при котором $y(x)=0$; $y(x)=1$; $y(x)=2{,}5$;

д) наибольшее значение функции и значение аргумента, при котором функция принимает своё наибольшее значение;

е) наименьшее значение функции и значение аргумента, при котором функция принимает своё наименьшее значение;

ж) запишите все значения аргумента, при которых функция равна нулю;

з) при каких значениях аргумента функция возрастает;

и) при каких значениях аргумента функция убывает.

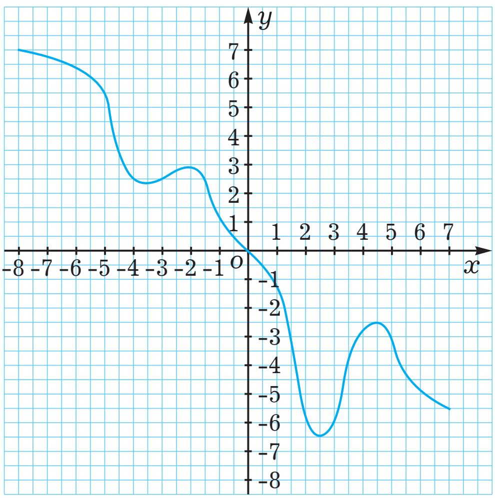


Рис. 39

11 Четырнадцатикратный олимпийский чемпион Майкл Фелпс совершает заплыв баттерфляем на дистанцию 200 м в 50-метровом бассейне. На графике, представленном на рис. 40, отмечено кратчайшее расстояние спортсмена от точки старта (измеренное вдоль бассейна) в зависимости от времени.

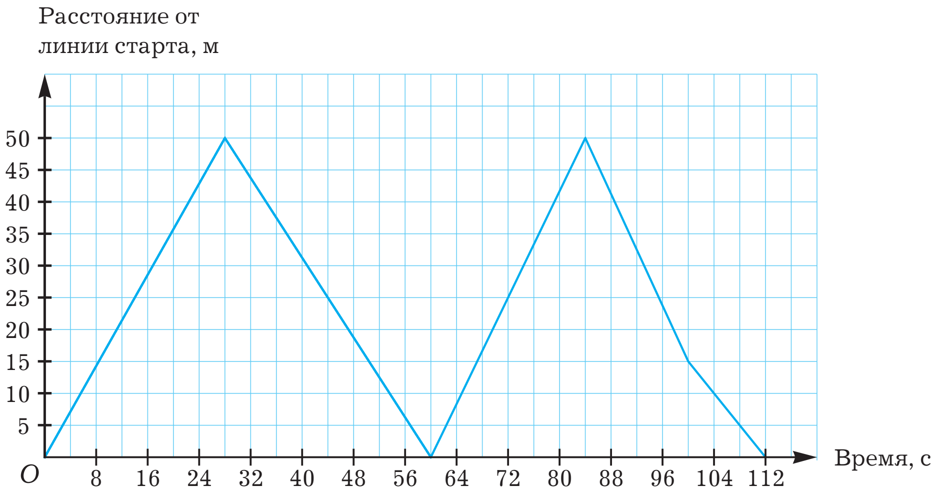


Рис. 40

а) Сколько секунд потребовалось спортсмену, чтобы проплыть 50 м? 100 м? 150 м? 200 м?
б) На сколько метров в секунду и во сколько раз изменилась скорость спортсмена на 100-й секунде заплыва?
в) С какой максимальной и с какой минимальной скоростью плыл спортсмен?
г) С какой средней скоростью спортсмен проплыл эти 200 м? За какое время он проплыл бы 1 км, плывя с этой скоростью?
д) На сколько секунд дольше спортсмен плыл вторые 100 м по сравнению с первыми?
е) Какова должна быть скорость пловца, чтобы, плывя равномерно с этой скоростью, побить мировой рекорд, установленный Майклом Фелпсом в этом заплыве?

12 а) Что такое линейная функция?
б) Что такое угловой коэффициент и свободный член в уравнении, задающем линейную функцию?
в) Что представляет собой график линейной функции?
г) Как построить график линейной функции, зная формулу, её задающую?
д) Как установить вид уравнения, задающего линейную функцию, имея её график?

13 Для линейных функций запишите угловой коэффициент и свободный член. Постройте их графики. Выясните, какие из них параллельны, а какие пересекаются. Для пересекающихся прямых определите координаты их точки пересечения. Определите также, какие из пересекающихся прямых перпендикулярны.

а) $y = x + 1$;	е) $y = -x$;	л) $y = -3$;
б) $y = x + 3$;	ж) $y = -x - 2$;	м) $y = 0$;
в) $y = 2x - 5$;	з) $y = -\frac{1}{4}x$;	н) $y = -\frac{1}{2}x - 1$;
г) $y = 4x$;	и) $y = -\frac{1}{2}x + 1$;	о) $y = -5x$;
д) $y = x$;	к) $y = 2$;	п) $y = 2 - 5x$.

14 Как по графику линейной функции установить знак или равенство нулю углового коэффициента k и свободного члена b?

15 Как по графикам двух линейных функций сравнить между собой их угловые коэффициенты и свободные члены?

16 На рис. 41 изображены графики четырёх линейных функций. Запишите уравнение каждой из них.

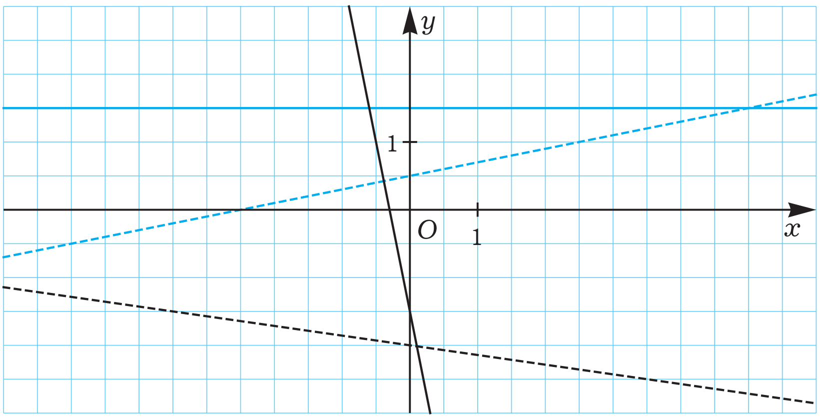


Рис. 41

17 а) Что такое парабола?
б) Как выглядит график функции $y = x^2$?
в) Что называют вершиной параболы и её ветвями?

18 Постройте на одном рисунке графики функций $y = x^2$, $y = -x^2$ при $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

19 Верно ли, что если $|a| \leqslant |b|$, то и $a^2 \leqslant b^2$? Обоснуйте свой ответ.

20 Что такое чётная функция? Как установить, что функция чётная? Как по графику функции выяснить ответ на этот вопрос? Выясните, какие из следующих функций чётные:

а) $y = \dfrac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$; в) $y = \dfrac{x^3}{x}$;

б) $y = x\left(x + x^3\right)^2$; г) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

21 а) Что такое гипербола?

б) Как выглядят графики функций $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = -\dfrac{1}{x}$?

в) Что называют ветвями гиперболы?

г) Когда ветви гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ лежат в I и III четвертях, а когда во II и IV?

22 Постройте на одном рисунке графики функций $y = \dfrac{3}{x}$, $y = \dfrac{1}{3x}$, $y = -\dfrac{3}{x}$, $y = -\dfrac{1}{3x}$ для $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

23 Сравните величины $\dfrac{a}{x}$ и $\dfrac{a}{y}$, если:

а) $x > y > 0$ и $a > 0$; д) $x > y$, $x > 0$, $y < 0$ и $a > 0$;

б) $x < y < 0$ и $a > 0$; е) $x > y$, $x > 0$, $y < 0$ и $a < 0$;

в) $x > y > 0$ и $a < 0$; ж) $x < y$, $x < 0$, $y > 0$ и $a > 0$;

г) $x < y < 0$ и $a < 0$; з) $x < y$, $x < 0$, $y > 0$ и $a < 0$.

24 Как по графику функции $y = \dfrac{k}{x}$ определить знак числа k?

25 Как по графикам функций $y = \dfrac{a}{x}$ и $y = \dfrac{b}{x}$ сравнить между собой числа a и b?

26 Что такое нечётная функция? Как установить, что функция нечётная? Как по графику функции выяснить ответ на этот вопрос? Выясните, какие из следующих функций нечётные:

а) $y = x^2\left(x^2 + 1\right)^3$; в) $y = \dfrac{x}{x^4 - 1}$;

б) $y = \dfrac{x^{10}}{x^{11}}$; г) $y = \dfrac{x}{\left(x + x^3\right)^2} - \dfrac{x^3}{\left(x^5 + x^3\right)^2}$.

К главе III Квадратные корни

1 а) Что называется квадратным корнем из данного числа?

б) Чем квадратный корень отличается от арифметического квадратного корня?

в) Можно ли извлечь квадратный корень из отрицательного числа?
г) Как определяется модуль числа с помощью арифметического квадратного корня?

2 Решите уравнения:
а) $x^2=49$; в) $x^2=11$; д) $x^2=0$; ж) $x^2=-7$;
б) $\sqrt{x}=10x$; г) $\sqrt{x+10}=10$; е) $\sqrt{4-x}=4$; з) $\sqrt{x^2}=x$.

3 При каких значениях x и y имеет смысл выражение:
а) $x\sqrt{y}$; б) $x\sqrt{-y}$; в) $x\sqrt{-y^2}$; г) $x\sqrt{y^2}$?

4 Вычислите:
а) $\sqrt{169}$; г) $\sqrt{0{,}0025}$; ж) $\sqrt{\dfrac{400}{361}}$;
б) $\sqrt{16}-2$; д) $\sqrt{225}-\sqrt{121}$; з) $\sqrt{1156-900}$;
в) $\sqrt{25}\cdot\sqrt{49}$; е) $\dfrac{0{,}065}{\sqrt{0{,}000169}}$; и) $0{,}01-\sqrt{0{,}01}$.

5 Выполните возведение в степень:
а) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}}\right)^{16}$; б) $\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^4$; в) $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)^4$.

6 Упростите:
а) $\left(\sqrt{17}+4\right)\left(\sqrt{17}-4\right)$; в) $\left(2\sqrt{10}+7\right)^2+\left(2\sqrt{10}-7\right)^2$;
б) $\sqrt{\left(\sqrt{1600}-\sqrt{576}\right)\left(\sqrt{1600}+\sqrt{576}\right)}$; г) $\left(\sqrt{21}-\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{21}+\sqrt{3}\right)^2$.

7 Верно ли, что если $0\leqslant n<m^2$, то $\sqrt{n}<|m|$?

8 Верно ли, что $\sqrt{x}>\dfrac{1}{\sqrt{a}}x$ при $0\leqslant x<a$?

9 Вычислите с точностью до десятых, не пользуясь таблицами и калькулятором:
а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{13}$; в) $\sqrt{120}$; г) $\sqrt{200}$.

10 С помощью калькулятора вычислите с точностью до стотысячных:
а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{101}$.

11 С помощью калькулятора вычислите с точностью до тысячных:
а) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{14}\left(\sqrt{\dfrac{1}{5}}+\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right)$; в) $\sqrt{1{,}123\cdot12{,}63}$; г) $\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{20}}{\sqrt{21}-\sqrt{20}}$.

12 Вычислите с помощью калькулятора:
а) $\sqrt{15\,129}$; б) $\sqrt{1\,002\,001}$; в) $\sqrt{0{,}7\cdot118{,}3}$.

13 Вычислите с помощью калькулятора:

а) $\sqrt{323\,208\,484+5\,198\,400}$; б) $\sqrt{11{,}123\cdot 12{,}78-120\cdot 1{,}1845992}$.

14 Найдите приближённые решения уравнений с точностью до десятитысячных:

а) $x^2=\dfrac{1}{2}$; б) $x^2=11{,}11$; в) $x^2=1000$; г) $x^2=1234$.

15 Докажите, что число $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ иррационально:

16 а) Как выглядит график функции $y=\sqrt{x}$?
б) Относительно какой прямой и какой части графика какой функции он симметричен?
в) Какова область определения функции $y=\sqrt{x}$?

17 Постройте графики функций $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}x}$, $y=\sqrt{4x}$, $y=\sqrt{\dfrac{1}{4}x}$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 4$, используя при этом точки $x=0$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{4}$; ...; 4.

18 Верно ли, что если $n<m$, то $\sqrt{n}<\sqrt{m}$?

19 Верно ли, что если $x\geqslant y\geqslant 0$, то $\sqrt{x}\geqslant\sqrt{y}$?

20 Как сравнить числа $\sqrt{a}$ и b (предполагается что $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$)?

21 Расположите в порядке возрастания числа:
$\sqrt{22}$; $\sqrt{55}$; $\sqrt{107}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt{197}$; $5\sqrt{6}$; 17; $\sqrt{133}$; $\sqrt{67}$; $\sqrt{298}$; 0; $\sqrt{69}$; $\sqrt{299}$; $3\sqrt{11}$; $\sqrt{73}$; $\sqrt{134}$; $3\sqrt{30}$; $2\sqrt{74}$; $\sqrt{215}$; $\sqrt{291}$.

22 В каком случае график функции $y=\sqrt{x}$ пересекается с прямой $y=s$?

23 В каком случае график функции $y=\sqrt{x}$ пересекается с прямой $y=kx+b$?

24 Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x}=2$; б) $\sqrt{x}=\dfrac{3}{x}$; в) $\sqrt{x}=4x-\dfrac{1}{2}$; г) $\sqrt{x}=\dfrac{1}{8}x^2$.

25 Перечислите свойства арифметического квадратного корня.

26 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{64\cdot 81}$; д) $\sqrt{0{,}0196\cdot 0{,}01}$; и) $\sqrt{121\cdot 1{,}21}$;

б) $\sqrt{\dfrac{121}{144}}$; е) $\sqrt{\dfrac{0{,}81}{0{,}04}}$; к) $\sqrt{2\dfrac{34}{81}}$;

в) $\sqrt{\dfrac{64}{144}\cdot\dfrac{49}{25}}$; ж) $\sqrt{\dfrac{4}{121}\cdot\dfrac{100}{9}\cdot\dfrac{169}{144}}$; л) $\sqrt{14\dfrac{1}{16}\cdot 3\dfrac{6}{25}}$;

г) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$; з) $\sqrt{\dfrac{5}{8}}\cdot\sqrt{\dfrac{45}{98}}$; м) $\sqrt{0{,}013}\cdot\sqrt{5{,}2}$.

27 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{104}}{\sqrt{26}}$; г) $\sqrt{\dfrac{10}{33}}:\sqrt{\dfrac{5}{264}}$; ж) $\dfrac{\sqrt{1{,}4}}{\sqrt{0{,}056}}$;

б) $\sqrt{143}\cdot\sqrt{65}\cdot\sqrt{55}$; д) $\dfrac{\sqrt{2000}}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{40}}$; з) $\dfrac{\sqrt{385}\sqrt{624}}{\sqrt{240\,240}}$;

в) $\sqrt{250^2-150^2}$; е) $\sqrt{\sqrt{(-2)^4}}\left(\sqrt{(-3)^2}\right)^2$; и) $\sqrt{392^2+294^2}$.

28 Упростите выражение $\sqrt{x^3yz^2tp^4}$, если $x<0$, $y>0$, $z<0$, $t<0$.

29 Упростите выражение:

а) $\sqrt{5x^2+10x+5}$; б) $\sqrt{4y^2-20y+25}$.

30 Упростите:

а) $\sqrt{0{,}081\cdot10^7}$; в) $\sqrt{14{,}4\cdot10^{-5}}$;

б) $\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-4\right)^2}$; г) $\sqrt{\left(\sqrt{24}-5\right)^2}$.

31 Запишите в виде произведения или частного радикалов:

а) $\sqrt{-ab}$; б) $\sqrt{xy^2z^3}$; в) $-\sqrt{-\dfrac{t^5}{p^3}}$.

32 а) Что значит внести множитель под знак корня? Как это можно сделать?
б) Что значит вынести множитель за знак корня? Как это можно сделать?
в) Как можно освободиться от иррациональности в знаменателе?

33 Вынесите множитель за знак радикала:

а) $\sqrt{612}$; б) $\sqrt{\dfrac{325}{686}}$; в) $\sqrt{x^3z^2}$, $x>0$, $z<0$; г) $-\sqrt{\dfrac{u^2}{t}}$, $u<0$.

34 Внесите множитель под знак радикала:

а) $6\sqrt{7}$; б) $\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; в) $-q\sqrt{2}$, $q<0$; г) $p\sqrt{p^2}$, $p<0$.

35 Упростите выражение:

а) $\sqrt{1872}+\sqrt{637}-\dfrac{2}{3}\sqrt{1053}$; в) $\sqrt{147q}-6\sqrt{12q}+\sqrt{75q}$;

б) $\sqrt{17{,}5}+\sqrt{\dfrac{56}{5}}+\sqrt{0{,}63}$; г) $\sqrt{\dfrac{125}{144}}-\dfrac{7}{156}\sqrt{\dfrac{845}{4}}+\sqrt{\dfrac{245}{64}}$.

36 Освободитесь от радикалов в знаменателе:

а) $\frac{1}{\sqrt{11}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{z}-1}$; д) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{k}+2}}$.

37 Освободитесь от радикалов в знаменателе:

а) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{8}}$; б) $\frac{2\sqrt{6}-8}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{13}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}}$.

38 Упростите выражение:

а) $\sqrt{13-2\sqrt{42}}$; б) $\sqrt{49-8\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

39 Упростите выражение:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{10}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+\sqrt{10}}-\frac{10+6\sqrt{10}-3\left(2-3\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{10}\right)\left(16+3\sqrt{30}\right)}$;

б) $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+\sqrt{10}}-\frac{\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)}{16\sqrt{2}+6\sqrt{15}}$;

в) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{11}}+\frac{\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}\right)}+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{13}}{\sqrt{2}+\sqrt{13}}$;

г) $\frac{2-\frac{3}{2}\sqrt{s}}{2+\frac{3}{2}\sqrt{s}}+\frac{2-\frac{5}{2}\sqrt{s}}{2+\frac{5}{2}\sqrt{s}}-\frac{14-\frac{45}{2}\sqrt{s}-15s+\frac{75}{4}s\sqrt{s}}{\left(2-\frac{5}{2}\sqrt{s}\right)\left(4+8\sqrt{s}+\frac{15s}{4}\right)}$;

д) $\frac{3xz}{\sqrt{x}+\sqrt{z}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}-\sqrt{3}+3\sqrt{3}xz-3xz\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}-\sqrt{3}\right)}$;

е) $\frac{1}{k+l}+\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{l}}+\frac{k\left(\sqrt{l}-2l\right)+k\sqrt{kl}+l\sqrt{k}\left(1+\sqrt{l}\right)-l^2-k^2}{(k+l)\left(\left(\sqrt{k}\right)^3+\left(\sqrt{l}\right)^3\right)}$;

ж) $\frac{3+\sqrt{7}}{\left(1-\sqrt{f}\right)\left(2-\sqrt{f}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{f}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{f}\right)}+\frac{1+\sqrt{7}+\sqrt{f}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{f}-2\right)}+$

$+\frac{3+\sqrt{f}}{\left(1-\sqrt{7}\right)\left(2-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{f}-\sqrt{7}\right)}+\frac{2+\sqrt{7}+\sqrt{f}}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)\left(\sqrt{f}-1\right)}$.

1 Решите уравнение:

а) $x^2 = 5x$; в) $4x^2 = 1$;

б) $(x-3)^2 = 5(x-3)$; г) $4(2x+1)^2 = 1$.

2 Решите уравнение:

а) $(x+1)(x+3) = (x+1)(7-x)$; в) $(3x+5)(3x+7) = (3x+5)(2x-1)$;

б) $(x-9)(x-6) = (x-6)(5-x)$; г) $(2x+9)(x-21) = (2x+9)(15-x)$.

3 Решите уравнение:

а) $3(x+2)^2 = 2(x+2)$; в) $(4x+2)^2 = 2(x+1)$;

б) $(2x+1)^2 = -(2x+1)$; г) $2(2x+2) = -(2x+1)^2$.

4 Решите уравнение:

а) $(3x+2)^2 = (2x+3)^2$; в) $(x-2)^2 = 4(x-1)^2$;

б) $(4x+1)^2 = (3x+6)^2$; г) $(x-4)^2 = (2x-5)^2$.

5 Решите уравнение в общем виде:

а) $x^2 + px = 0$; в) $ax^2 + bx = 0$;

б) $x^2 + q = 0$; г) $ax^2 + c = 0$.

6 Выведите формулу корней для приведённого квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом $x^2 + 2px + c = 0$: $x_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - ac}$.

7 Решите уравнение:

а) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$; в) $3x^2 - \sqrt{3}x - 6 = 0$;

б) $x^2 - 3\sqrt{5}x + 10 = 0$; г) $2x^2 - 5\sqrt{5}x + 15 = 0$.

8 Решите уравнение:

а) $x^2 - 34x + 288 = 0$; в) $21x^2 - 22x - 8 = 0$;

б) $x^2 - 36x + 320 = 0$; г) $5x^2 - 26x + 5 = 0$.

9 Решите уравнение:

а) $x^2 - 29x + 190 = 0$; в) $4x^2 - 17x - 15 = 0$;

б) $x^2 - 33x + 270 = 0$; г) $22x^2 - 9x - 1 = 0$.

10 Решите уравнение:

а) $(x-2)^3 - (x-1)^3 = 1$; в) $(2x-1)^3 - (2x-4)^3 = 9$;

б) $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 16$; г) $(2x+7)^3 - (2x+3)^3 = 28$.

11 При каких значениях a уравнение имеет единственный корень? Найдите этот корень.

а) $\dfrac{x^2-4x+3}{x-a}=0$;
б) $\dfrac{x^2+x-2}{x+a}=0$;
в) $\dfrac{x^2-x+a}{x+2}=0$;
г) $\dfrac{x^2-ax+4}{x-1}=0$.

12 Выразите одно неизвестное через другое:

а) $x^2+2xy-y^2=0$;
б) $x^2+2xy-8y^2=0$;
в) $3x^2-4xy+y^2=0$;
г) $2x^2-xy-y^2=0$.

13 Решите уравнение:

а) $(x-4y)^2+(x-2)^2=0$;
б) $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0$.

14 Уравнения $x^2+px+q=0$ и $x^2+qx+p=0$ имеют общий корень, причём $p \neq q$. Найдите $p+q$.

15 Найдите, если возможно, среднее арифметическое и среднее геометрическое корней уравнения:

а) $x^2-7x+9=0$;
б) $x^2-4x+6=0$;
в) $9x^2-4x+1=0$;
г) $4x^2-20x+9=0$.

16 В уравнении $4x^2-15x+4c^2=0$ определите c так, чтобы один из корней был квадратом другого.

17 Сформулируйте условие, при котором корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ являются:

а) взаимно обратными числами;
б) противоположными числами.

18 При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2+x+a=0$ равна 3?

19 Разность корней уравнения $x^2-7x+c=0$ равна 5. Найдите корни уравнения и коэффициент c.

20 Частное корней уравнения $x^2+bx+3=0$ равно 27. Найдите корни уравнения и коэффициент b.

21 Один из корней уравнения $3x^2+12x+q=0$ равен -3. Найдите второй корень уравнения и коэффициент q.

22 Один из корней уравнения $4x^2+px+28=0$ равен 7. Найдите второй корень уравнения и коэффициент p.

23 Докажите, что если D — дискриминант, а x_1, x_2 — корни квадратного уравнения, то $D=(x_1-x_2)^2$.

24 Сформулируйте условие, при котором корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$ будет любое действительное число.

25 Сократите дробь:

а) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10}$; в) $\frac{x^3-4x^2-9x+36}{x^2-7x+12}$;

б) $\frac{x^3+4x^2-9x-36}{x^2+x-12}$; г) $\frac{x^3-x^2-16x+16}{x^2+3x-4}$.

26 В турнире по футболу сыграно 66 матчей. Сколько команд участвовало в турнире, если каждая команда сыграла с каждой ровно один матч?

27 Сумма квадратов двух последовательных нечётных чисел равна 394. Найдите эти числа.

28 Диагональ квадрата больше его стороны на 3 см. Найдите длину стороны.

29 Найдите три последовательных чётных числа, таких, что сумма квадратов первых двух чисел равна квадрату третьего числа.

30 За два года объём выпускаемой продукции предприятия увеличился вдвое. Каков средний ежегодный прирост продукции?

К главе V Рациональные уравнения

1 Решите уравнение:

а) $x^4=9x^2$; в) $x^4=81$;

б) $x^4-5x^2=0$; г) $16x^4=81$.

2 Решите уравнение:

а) $x^3+x^2-2=0$; в) $x^4-3x^3+2x=0$;

б) $x^3+x^2-12=0$; г) $x^4-3x^3+4x=0$.

3 Решите уравнение:

а) $x^3+2x^2-x-2=0$; в) $x^3-3x^2-x+3=0$;

б) $x^3+x^2-4x-4=0$; г) $x^3-2x^2-16x+32=0$.

4 Разложите на множители:

а) $x^4+5x^2+4=0$; в) $2x^4+3x^2-5=0$;

б) $x^4-4x^2+3=0$; г) $4x^4-x^2-12=0$.

5 Составьте биквадратное уравнение, корни которого равны:

а) ±1 и ±3; б) $\pm\sqrt{2}$ и $\pm\sqrt{3}$.

6 Выразите одно неизвестное через другое:

а) $x^2+xy^2-2y^4=0$;
б) $x^2+3xy^2-4y^4=0$;
в) $5x^4+x^2y-6y^2=0$;
г) $3x^4+2x^2y-5y^2=0$.

7 Дано уравнение $x^4+px^2+q=0$. Найдите:

а) сумму корней;
б) произведение корней.

Исследуйте все возможные случаи.

8 Сформулируйте условие, при котором биквадратное уравнение $x^4+px^2+q=0$ имеет:

а) один корень;
б) два корня;
в) три корня;
г) четыре корня.

9 Решите уравнение:

а) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$;
б) $(x+1)(x+3)(x^2+2x)=24$;
в) $x(x+3)(x^2+3x+2)=120$;
г) $(x^2+3x)(x+1)(x+2)=120$.

10 Решите уравнение:

а) $\dfrac{18}{x+3}=\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{4}{x-1}$;
б) $\dfrac{16}{x+3}=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{6}{x+1}$;
в) $\dfrac{27}{x+4}=\dfrac{8}{x+3}+\dfrac{20}{x+5}$;
г) $\dfrac{16}{x-5}=\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$.

11 Существует ли такое значение x, при котором сумма дробей $\dfrac{x-1}{2x+1}$ и $\dfrac{x+3}{x+2}$ равна их произведению?

12 Существует ли такое значение x, при котором разность дробей $\dfrac{x+38}{2x-1}$ и $\dfrac{x+1}{x-3}$ равна их произведению?

13 Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x}{2x-1}+\dfrac{7x}{2x+1}=\dfrac{4-20x}{1-4x^2}$;
б) $\dfrac{5x}{x-3}-\dfrac{16x}{x+3}=\dfrac{2x-50}{9-x^2}$;
в) $\dfrac{2}{5x-10}-\dfrac{x-1}{3x^2+6x}=\dfrac{8}{5x^2-20}$;
г) $\dfrac{2x+1}{6x^2-3x}-\dfrac{2x-1}{14x^2-7x}=\dfrac{8}{12x-3}$.

14 Решите уравнение:

а) $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2-x}{x+1}+\dfrac{3}{x-4}$;
б) $\dfrac{4x-6}{x+2}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{9}{x+1}-\dfrac{9}{x+2}$;
в) $\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{x}{2x-1}$;
г) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{2x+2}{x+3}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}$.

15 Решите уравнение:

а) $\dfrac{2}{x^2+3}+\dfrac{4}{x^2+7}=1;$ в) $\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+3}=3;$

б) $\dfrac{1}{x^2+4}+\dfrac{1}{x^2+5}=\dfrac{11}{30};$ г) $\dfrac{5}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^2+3}=\dfrac{1}{6}.$

16 Решите уравнение:

а) $\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)^2-1=0;$ в) $\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}\right)^2-9=0;$

б) $\left(\dfrac{5x-2}{2x^2}\right)^2+\dfrac{2-5x}{2x^2}=0;$ г) $\left(\dfrac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2-\left(\dfrac{5x}{4-x^2}\right)^2=0.$

17 Решите уравнение:

а) $2\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2-7\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)+5=0;$ в) $4\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)^2+5\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)+1=0;$

б) $5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+2\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)-3=0;$ г) $\left(\dfrac{2-x^2}{x}\right)^2-2\left(\dfrac{2-x^2}{x}\right)+1=0.$

18 Решите уравнение:

а) $\dfrac{4}{x^2-16}-\dfrac{1}{x^2+8x+16}=\dfrac{10}{x^3-16x-4x^2+64};$

б) $\dfrac{6}{1-4x^2}+\dfrac{4}{x^2-25}+\dfrac{27}{4x^3-20x^2-x+5};$

в) $\dfrac{2}{x^2-9}+\dfrac{11x+4}{x^3+27}=\dfrac{x}{x^3-6x^2+18x-27};$

г) $\dfrac{1}{x^3+8x^2+32x+64}=\dfrac{9x}{x^3-64}-\dfrac{6}{x^2-16}.$

19 Числитель дроби на 1 меньше знаменателя. Если из числителя и знаменателя дроби вычесть 1, то дробь уменьшится на $\dfrac{1}{12}$. Найдите эту дробь.

20 Знаменатель обыкновенной дроби на 1 меньше её числителя. Если к числителю прибавить 5, а к знаменателю 12, то полученная дробь будет втрое меньше исходной. Найдите эту дробь.

21 Для перевозки 15 т яблок автобаза предоставила фермеру грузовик вместимостью на полтонны меньше, чем предполагалось первоначально, поэтому для перевозки яблок потребовался один дополнительный рейс. Какова вместимость грузовика?

22 Два комбайнёра, работая совместно, могут выполнить задание за 6 ч. Первый комбайнёр, работая один, может выполнить задание на 5 ч быстрее, чем второй комбайнёр. За какое время выполнит задание первый комбайнёр?

23 Рабочий должен изготовить 120 деталей к определённому сроку. Однако он изготовлял в день на 2 детали и больше, чем предполагал, а поэтому выполнил работу на 3 дня раньше срока. Сколько дней он работал?

24 Расстояние в 36 км один из двух лыжников прошёл на полчаса скорее, чем другой. Скорость первого лыжника на 1 км/ч больше, чем второго. Найдите скорость каждого.

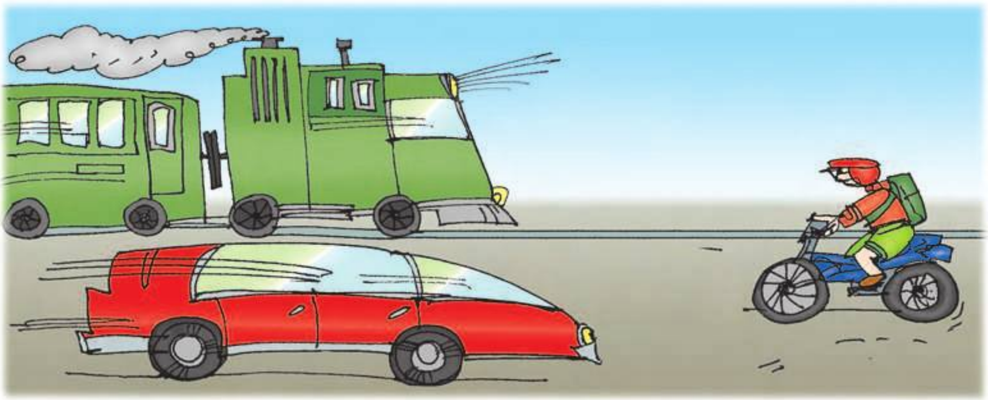
25 Моторная лодка прошла расстояние 45 км против течения реки и такое же расстояние по течению, затратив на весь путь 14 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч.

26 Расстояние в 210 км пароход проплывает по течению на 4 ч быстрее, чем против течения. Найдите собственную скорость парохода, если скорость течения реки 3 км/ч.

27 Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, выехали одновременно два велосипедиста. Скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому он прибыл в пункт B на 2 ч раньше. Найдите скорости велосипедистов.

28 Расстояние в 400 км пассажирский поезд прошёл на 1 ч быстрее товарного. Определите скорости поездов, если скорость пассажирского поезда на 20 км больше скорости товарного.

29 Сплав меди и алюминия содержит 22 кг алюминия. В него добавили 15 кг меди. Число, выражающее процентное содержание меди в новом сплаве, на 33 больше числа, выражающего процентное содержание меди в первоначальном сплаве. Сколько килограммов алюминия в сплаве?



Элементы статистики

1 Найдите среднее, размах, медиану и моду набора чисел:
а) 5; 6; 7; 9; 9; 9;
б) 4; 1; 5; 7; 1; 5; 5; 1; 7; 5; 1;
в) 8; 2; 8; 3; 3; 10; 16; 10; 10; 16; 6; 17;
г) 0,2; 0,6; 0,6; 0,3; 0,4; 0,4; 0,9, 0,8; 0,1; 0,3; 0,4; 0,1; 0,7; 0,5; 0,9; 0,2.

2 Найдите по таблице среднее число фильмов, снимавшихся за год в России в первом десятилетии XXI века. Найдите также размах и моду. Постройте по данным таблицы столбчатую диаграмму.

Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Количество фильмов	65	66	95	120	110	153	205	255	231	216

3 К набору чисел добавили ещё три числа, но после этого медиана нового набора осталась такой же. Могли ли все три эти числа быть больше медианы?

4 а) Имеется два набора чисел, у которых одинаковые средние. Эти наборы объединили в один набор. Обязательно ли среднее нового набора равно среднему каждого из первоначальных наборов?
б) Тот же вопрос для моды.
в) Тот же вопрос для медианы.

5 Найдите по таблице частот среднее, размах, моду и медиану.

Количество баллов, набранных на тестировании	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество школьников	17	28	44	67	94	122	130	67	29

Что показывают полученные результаты?

6 Приведите пример набора конкретных числовых данных, который гораздо информативнее характеризуется медианой, чем средним арифметическим.

7 Для набора чисел вычислили среднее (оно равно 5), после чего одно из чисел стёрли. Оставшиеся числа таковы: 6; 2; 2; 11; 4; 7. Можно ли определить, какое число стёрли? Если да, определите. Если нет, объясните почему и попробуйте установить хоть какую-нибудь информацию о стёртом числе.

8 а) Для набора чисел вычислили медиану (она равна 5), после чего одно из чисел стёрли. Оставшиеся числа таковы: 6; 2; 2; 11; 4; 7. Можно ли определить, какое число стёрли? Если да, определите. Если нет, объясните почему и попробуйте установить хоть какую-нибудь информацию о стёртом числе.
б) Тот же вопрос, если медиана была равна 6.

9 В таблице приведены данные опроса восьмиклассников о времени, затрачиваемом на приготовление уроков. Найдите среднее время приготовления уроков. Постройте гистограмму относительных частот.

Время, мин	0—30	30—60	60—90	90—120	120—150	150—180
Количество школьников	42	133	231	118	94	32

10 Во время диспансеризации измерили вес 50 мальчиков – учащихся восьмого класса и получили следующие данные (в кг):

51; 58; 47; 45; 52; 56; 52; 48; 62; 57; 56; 53; 46; 53; 49; 46; 59;
47; 45; 43; 44; 43; 50; 49; 50; 47; 54; 61; 48; 51; 42; 47; 61; 49;
46; 51; 45; 56; 43; 58; 47; 34; 50; 54; 53; 42; 43; 53; 57; 41.

Для полученного набора:
а) запишите упорядоченный набор;
б) найдите наименьший и наибольший вес;
в) найдите размах;
г) взяв для дальнейшей работы количество интервалов, равным 6, определите шаг интервала;
д) постройте интервальную таблицу частот (абсолютных и относительных);
е) постройте гистограмму абсолютных частот;
ж) найдите средний вес мальчика среди обследованных;
з) постройте таблицу накопленных относительных интервальных частот;
и) найдите медиану.

ОТВЕТЫ

К параграфу 1.1

4. а) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{19}{10}$; е) $-\frac{29}{5}$; з) 1.

5. а) $-\frac{1}{3}$; в) 0; е) $\frac{13}{34}$; з) 1.

9. $\frac{151}{222}$, $\frac{60}{23}$, $\frac{47}{24}$, $\frac{59}{12}$, $-\frac{289}{72}$, $-\frac{610\ 029}{438\ 292}$.

12. а) $m \neq -1$ и $n \neq -2$ и $k \neq -3$; в) $y \neq 0;\ -1;\ -2;\ -3$; е) $s \neq 1;\ 3;\ 5;\ 7$; з) $s \neq -2;\ 1$.

13. а) $\frac{S}{t}$; в) $\frac{m-k}{m}$; г) $\frac{V}{H}$; е) $\frac{S}{t}-\frac{S}{T}$.

14. а) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$; в) $\frac{S}{v-u}+\frac{S}{v+u}$.

15. а) $\frac{k^2+2k+2}{4k}\cdot\frac{N}{t}$; в) $\frac{3+2q}{6w}S$.

16. $\frac{S}{x-y}+\frac{1}{2}+\frac{S}{x+y}$.

17. $\frac{1+2A+AB}{1+2B+AB}$.

К параграфу 1.2

3. а) $\frac{2x^2y^4}{6xyz}$; в) $\frac{36s^3t}{9jzt}$; е) $\frac{\frac{2}{3}dy^2}{3jy^2}$; з) $\frac{36k^2w^3}{27j^2}$.

4. а) $\frac{1-a-ab+a^2b}{(a-1)^2}$; в) $\frac{6l^2u+6lu^2}{10l+8lu^3}$; г) $\frac{a^3+2a^2-1}{(a+1)^3}$; е) $\frac{24g^2uz^2-21g^5z}{6g^2u^2z+9g^2z^2}$.

5. а) $\frac{15x^2-3xy}{3x}$; в) $\frac{(5x-y)(3s+4v)}{3s+4v}$.

6. а) $-\frac{4}{3b^2h^5v^2}$; в) $\frac{z^3}{g^6k^6}$; е) $-\frac{8}{5}akr$; з) $\frac{1}{7s^5w^2x^4}$.

7. а) $\frac{ab}{3}$; в) $\frac{n}{z}$; е) $\frac{k+1}{k+3}$; з) $\frac{pq^2}{p+q^2}$.

8. а) $\dfrac{m}{m+n}$; в) $\dfrac{s+1}{s^2}$; г) $\dfrac{(q-2p)^2}{q^2}$; е) $\dfrac{(f+g)^2}{f^2-fg+g^2}$.

9. а) $\dfrac{x-3}{x+3}$; в) $k-l$; г) $\dfrac{1}{(x-y)(x+y)^3}$; е) $\dfrac{3h^2j^4}{(5+2x)^2}$.

11. а) $a+b$; в) $\dfrac{a-b}{a+b}$; г) $18-42s$; е) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$.

13. а) $\dfrac{3+a}{a-5b}$; б) $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}$; в) $\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$; г) $\dfrac{2r+s-2}{2r+s}$; д) $\dfrac{a-2b}{a+2b}$; е) $\dfrac{3t-4p}{t+p}$; ж) $\dfrac{x-3}{x}$;

з) $\dfrac{1+x^2y^4}{1-x^2y^4}$.

14. а) $\dfrac{a^4-a^2-1}{a^2-1}$; б) $\dfrac{x+y-z}{x-y+z}$; в) $\dfrac{1}{3a^2+b^2}$; г) $\dfrac{c}{ab-c^2}$; д) $\dfrac{pt+q}{pt-q}$; е) $\dfrac{1}{g^4-j^4}$.

15. а) $\dfrac{1}{a^2+b^2-bc+c^2-a(b+c)}$; б) $y+z$; в) $\dfrac{xy+z}{xy-z}$; г) $\dfrac{b-d}{a-c}$;

д) $\dfrac{(ab+cd-1)(ab+cd+1)}{ab-cd}$; е) 1.

К параграфу 1.3

3. а) $15xy^3z^3$; в) $2cf^5ks^2v$; е) $20k^3p$; з) $2h^2u^4w^4y^2$.

5. а) $x(x^2-16)$; в) $rs(r-s)$.

10. а) $\dfrac{-3a^2+12ab+8b^2}{18a^3b^3}$; в) $\dfrac{-56a^4f^6+7a^4g^5j^2-8f^6g^5j^2}{56a^4f^6g^5j^2}$;

е) $\dfrac{-40f^6+12f^6u^5+15u^{11}}{120f^6u^{11}}$; з) $\dfrac{-14b-63c^7-18bc^7}{126bc^9}$.

12. а) $\dfrac{7x^2}{3x-y}$; в) $\dfrac{3e^2+40f^3g+40f^3m+7gs^3+7ms^3-l^2t^3}{g+m}$;

е) $\dfrac{9c^3+160dh-5h^2-100hj-16dt+10jt}{8d-5j}$; з) $\dfrac{-20u+36lx+4mx+m^3y}{9l+m}$.

14. а) $\dfrac{m^2-mn-n^2}{m(m^2-n^2)}$; в) $\dfrac{2x^2+xy+y^2}{(2x-3)(4x^2-y^2)}$; е) $-\dfrac{u+v}{u(2u+v)^{12}}$; з) $\dfrac{2-2q+q^2}{q(2-3q+q^2)}$.

15. а) $\dfrac{8x}{(x-3)^2(x+3)}$; в) $\dfrac{ac+bc+c^2-ad+bd+d^2}{(a+b)(c-d)(c+d)}$; г) $\dfrac{1}{x(2+3x+x^2)}$;

е) $\dfrac{4u(4u+27v^2)}{(4u-12uv+9v^2)(4u+12uv+9v^2)}$.

16. а) $\dfrac{2-9x}{x(x-2)^2}$; в) $\dfrac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$; д) $\dfrac{-1-t}{3-3t+t^2}$; е) $\dfrac{5i-3j}{4ij}$.

17. а) $\dfrac{y-x}{xy(x+y)}$; в) $\dfrac{(u-v)^2(2+u^2-v^2)}{(u+v)^2}$; д) $\dfrac{2}{q+p}$; е) $-\dfrac{4}{(z+1)(z+2)(z+3)}$.

18. а) $\dfrac{1+5a}{30a-6}$; в) $\dfrac{1}{9(7+2w)(1+4w)}$; г) $\dfrac{1}{4k^2-6k}$; е) $\dfrac{1}{(j-1)(j-3)}$.

19. а) $\dfrac{3-16l^2}{(5l-2)^3(3l-1)^3}$; в) $-\dfrac{3(6+7i+3i^2)}{i(1+i)(3+i)}$.

20. а) $\dfrac{3}{a-5b}$; б) $-\dfrac{1}{1+h}$; в) $\dfrac{1}{a+b-c}$; г) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$; д) $\dfrac{1}{r^2-Rw-r}$.

21. а) $\dfrac{1}{f+g+h}$; б) $2+x$; в) $\dfrac{1}{4x-5y}$; г) $\dfrac{1}{a^2-b^2}$; д) $\dfrac{1}{i+j-1}$; е) 1.

22. а) 0; б) $\dfrac{(a+b)(b-c)}{(c+d)(c-d)}$; в) $\dfrac{1}{rs+S^2}$; г) $\dfrac{1}{mn+n^2}$; д) $\dfrac{1}{4+4d-15d^2}$.

23. а) 0; б) $x^2+y^2+z^2-a^2-b^2$; в) $luv-xyz$;

г) $\dfrac{f+g+h+j-x}{(f-x)(x-g)(x-h)(x-j)}$; д) $\dfrac{1}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}$;

е) $\dfrac{1}{(1+x^4)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)}$; ж) $\dfrac{b}{b^2+ac}$; з) $\dfrac{1}{n^2-m^2}$.

К параграфу 1.4

3. а) $\dfrac{3y^3z}{x}$; в) $-\dfrac{10m^3}{9h^3y^2}$; е) $\dfrac{7m-8d}{8p}$; з) $\dfrac{2j+3l}{3x-7v}$.

6. а) $\dfrac{3a}{b-1}$; в) $-\dfrac{2f}{tz^3}$; г) $\dfrac{(l-1)l^2}{(4a-7c)^2}$; е) $\dfrac{k(a+2b)}{m^2p}$.

7. а) $\dfrac{2x+y}{2x-y}$; в) $\dfrac{-10d-7t}{21s^3v}$; г) $\dfrac{i}{2(1+i)}$; е) $-\dfrac{4}{j^2}$.

9. а) $\dfrac{y}{3x}$; в) ek; е) $\dfrac{4m^2}{7}$; з) $\dfrac{u^5z^7}{2}$.

10. а) $\dfrac{4b^4}{n}$; в) -7; г) 7; е) $-9g^3$.

11. а) $\dfrac{1}{b-a}$; в) $\dfrac{1}{4t-7}$; г) $-\dfrac{fp^2}{lr^2}$; е) $-\dfrac{3j}{2z}$.

12. а) x^2y; в) q; е) 0; з) $\dfrac{m^4}{M^4}$.

13. а) $\dfrac{m^2}{n^2}$; в) $(f+2h)(2g-k)$; е) $\dfrac{(d+1)(D-1)}{(d-1)(D+1)}$; з) $\dfrac{-u-v}{u^3v^3}$.

14. а) $\dfrac{m^2}{n(m+n)}$; в) $\dfrac{h^3-g^2h}{g}$; д) $\dfrac{1-q^2}{q^2}$; е) $\dfrac{2-9x}{x(x-2)^2}$.

15. а) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$; в) $\dfrac{(u+v)(u^2+v-uv)}{(u-v)(u^2-v+uv)}$; д) $\dfrac{j^4-4i^2j^2}{i^2(i^2-4j^2)}$.

16. а) $\dfrac{3h^2+2r^3}{2h^2+3r^3}$; в) $\dfrac{f+j}{f-2j}$.

17. в) $\dfrac{6mn}{m^2-3mn+3n^2}$; г) $\dfrac{1}{f-1}$; е) $\dfrac{1}{p+t}$.

18. а) $\dfrac{y(x-y)^2}{x(x^2+y^2)}$; в) $u+v$; г) $\dfrac{1}{r-s}$; е) $\dfrac{l+ir}{l^2}$.

19. а) $\dfrac{a+5b}{a-5b}$; б) 1; в) 1; г) $\dfrac{p+q-r}{p-q+r}$; д) $\dfrac{f+2g-1}{f+2g-2}$; е) 1.

20. а) $\dfrac{(x^2+xy+y^2)^2}{(x^2-xy+y^2)^2}$; б) $\dfrac{1+u}{3+2u}$; в) 1; г) 1; д) -1; е) $\dfrac{d-z}{d+z}$.

21. а) $\dfrac{1}{ax+by}$; б) $(u^4-u^2v^2+v^4)^2$; в) $\dfrac{1}{(m^2-n^2)^2}$; г) $\dfrac{f-g+fg}{f+g-fg}$; д) $\dfrac{1}{r^2-s^2}$;

е) $\dfrac{n^3-2m^2}{n^3+3m^2}$.

К параграфу 1.5

1. а) $6(y-1)$; в) 0; е) $1+z^2$; з) $\frac{h+y}{y}$.

2. а) $\frac{1}{a-b}$; в) $\frac{1}{v-u}$; е) -1; з) $\frac{1}{pqr}$.

3. а) $\frac{x^2+y^2}{x}$; в) $\frac{d}{d-1}$; е) $\frac{8h^2-15g^2}{12g}$; з) 1.

4. а) $\frac{x}{x-3}$; в) $\frac{t^2}{1+t^2}$; г) $\frac{h+m-1}{h+m}$; е) $\frac{1}{j}$.

5. а) $\frac{2x}{1+x^2}$; в) $\frac{1}{1+m}$; г) $\frac{7-6l-4l^2}{5+l}$; е) $\frac{1+j^2+2j^3+j^6}{j(j^6-1)}$.

6. а) $\frac{1}{(m+n)^2}$; в) $\frac{w^3+2qw^2+qw-q}{2q+w}$; г) $\frac{2t+2t^2-4t^3-3}{3+t}$; з) $-\frac{2s^2}{1+s+s^2}$.

7. а) $\frac{6(b^2+8ab-4a^2)}{b^2(5b-2a)}$; в) $-3+2x+2x^2$; г) $\frac{1}{k}$; е) $\frac{1}{z}$.

8. д), ж), г).

11. а) $\frac{(b-x)^2}{(b+x)^2}$; б) $\frac{f+g-h}{f-g+h}$; в) $\frac{(1-x)(1+x^2)}{1+x^3}$; г) 1; д) $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$;

е) $\frac{(u-w)(u+2v-w)(u+v+w)}{(u+w)(u+2v+w)(u+v-w)}$; ж) $\frac{1}{6-5i+i^2}$; з) $\frac{1}{(u^4-1)^2}$.

13. а) 23; б) 110; в) 527.

14. а) $a+b+c$; б) $\frac{x-3}{x}$; в) $\frac{u+v}{u-v}$; г) $\frac{p+q+r-s}{p-q+r+s}$.

К параграфу 1.6

3. а) $\frac{43}{150}$; в) 3; е) 18; з) 2.

4. а) a^{-3}; в) z^{-7}; е) p^{24}; з) n^{-175}.

5. а) a^{-10}; в) l^{12}; е) w^{-70}; з) p^{23}.

7. а) $\frac{4}{9}$; в) 10; г) 1; е) $\frac{22}{21}$.

8. а) 7^3; в) 5^{-47}; е) 10^{-23}; з) 17.

9. а) a^{-1}; в) c^{90}; е) f^{18}; з) h^{-11}.

10. а) $\frac{1}{2}$; в) 27; г) 1; е) 19.

11. а) 3^2; в) 7^{-1}; е) 11^4; з) 12^{14}.

13. а) $-a^9b^{-6}c^3$; в) $h^{12}z^{-12}$; г) $a^{-28}g^{-21}k^{-35}$; е) $-c^{35}t^{14}e^{-14}x^{-28}$.

16. а) a^{-15}; в) c^7; е) f^{143}; з) h^{-100}.

17. а) 3^{-3}; в) 3^{-5}; е) 3^{-210}; з) 3^{30}.

18. а) $\frac{1}{36}$; в) $\frac{1}{4}$; е) 1; з) $\frac{128}{125}$.

19. а) $2\cdot10^1+2\cdot10^{-2}+4\cdot10^{-3}$; б) $3\cdot10^{-4}+7\cdot10^{-5}$.

20. а) 9990,078; в) 3930,8006; е) 6043,08951.

21. а) $6{,}74\cdot10^5$; в) $4{,}202564262\cdot10^3$; е) $6{,}9344\cdot10^{-3}$.

22. а) 0,000026; д) 0,0122.

23. а) $\frac{ab}{a+b}$; в) $\frac{4uv}{v^2-u^2}$; е) $\frac{h(2+h^2)}{1+h^2}$; з) $\frac{1+q^2}{1-q^2}$.

24. а) $\frac{a^3b^3}{(a-b)^2(a+b)}$; б) $\frac{x(2+x^2)}{1+3x^2+x^4}$; в) $\frac{1-x-x^2}{(1+x)^2}$; г) $\frac{2s}{1+s^2}$; д) $\frac{1+f^4+f^8}{f^8-1}$;
е) $\frac{4(w-1)^3}{(w-2)^2w^4}$.

25. а) $\frac{1}{xy}$; б) $\frac{3+4z+z^2}{3-4z+z^2}$; в) $\frac{uv-1}{uv+1}$; г) $\frac{l-m-k}{l-m+k}$; д) $\frac{x-1-x^2}{x-1+x^2}$; е) $\frac{s^5}{4(s^2-1)}$.

К параграфу 2.1

5. $s=12t, 0\leqslant t\leqslant 4$.

6. $d=\frac{1500}{5t}$.

7. $c=\frac{m}{500+m}$, $0\leqslant m\leqslant 150$.

10. а) 0; 2; 2; -4; -10; 1,04; в) -7; 0; 1; 2; 9; $\frac{35}{8}$.

11. а) -1; в) $-\frac{11}{9}$; е) 11; з) $-\frac{3}{5}$.

12. а) 1; в) $\frac{5}{2}$; е) -17; з) $\frac{25}{4}$.

13. а) 4; в) $\frac{7}{5}$.

14. а) 3 и -3; в) 4 и -4.

15. а) x – любое число; в) x – любое число, кроме 1; е) x – любое число, кроме 0, 1 и -1; з) x – любое число, кроме 0, 1 и -1.

16. а) x – любое число, кроме 1 и -1; в) x – любое число, кроме $\frac{3}{2}$ и -2; е) x – любое число, кроме -1; з) x – любое число, кроме 0.

17. $m = \frac{n(n-1)}{2}$, $n \geqslant 2$.

18. а) $f(2)=3$; б) $f(6)=f(7)$; в) $f(2)=f(-1)$; г) $f(9)+f(-9)=1$.

19. а) 2; б) -5; в) -170; г) 250.

20. а) $3-2a$; б) $5-2m$; в) $3-8c$; г) $-3-2x$.

21. а) $-2+6x+4x^2$; б) 10; в) $76-144x+81x^4$; г) $3x^2-2$; д) $\frac{-2+3x+4x^2}{x^2(3x-2)}$; е) 9; ж) $\frac{81+216x-192x^3+10x^4}{27x^4}$; з) $2-3x$.

К параграфу 2.2

3. а) Нет; б) нет; в) да; г) нет.

4. а) Нет; б) да; в) нет; г) да.

5. а) 2; 2; 3; б) 3,25, или 4, или 6,25, или 6,75; $-1{,}25$, или 1, или 7,1; в) -1; 2,5; 2; г) -2, или 2, или 4,5, или 5,5, или 7; 3, или 4,15, или 6, или 6,9; 0 или 7,25.

6. а) 5; 5; 8; б) 7; 4,5; -5, или 0, или 3,1, или 5,5; в) 9; г) 7; д) -2; е) 4,5.

7. а) -3 и 0; б) например, при -4; 2 или 6,54; в) например, при -2, -1 или $-0{,}23$; г) при значениях аргумента, больших -1; д) при значениях аргумента, меньших -1.

8. а) 5; б) 1; в) 80 км; г) 40 км/ч и 70 км/ч; д) 44 км/ч.

9. а) 240 км; б) $\frac{2}{3}$ ч; в) грузовой через 5 ч, легковой через 3 ч; г) грузовой со скоростью 48 км/ч, легковой – 80 км/ч; д) 1 ч; е) 80 км; ж) $1\frac{1}{3}$ ч.

12. Не всякая.

13. б); в).

14. Если любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает линию не более чем в одной точке. Если это так, то такая линия представляет собой график некоторой функции.

К параграфу 2.3

6. б), г), д), ж).

7. а) $k=-1$; $b=4$; б) $k=11$; $b=-13$; в) $k=-3$; $b=0$; г) $k=0$; $b=-6$.

8. а) Прямая, проходящая через точки $(0;\ -1)$ и $(1;\ 1)$; в) прямая, проходящая через точки $(0;\ -3)$ и $(1;\ 0)$; е) прямая, проходящая через точки $(0;\ 0)$ и $(1;\ 3)$; з) прямая, совпадающая с осью абсцисс.

10. а) Параллельны; б) совпадают; в) пересекаются; г) пересекаются; д) совпадают; е) параллельны; ж) параллельны; з) пересекаются.

11. а) $k=0$; $b<0$; б) $k<0$; $b<0$; в) $k>0$; $b<0$; г) $k>0$; $b=0$; д) $k>0$; $b<0$; е) $k=0$; $b>0$; ж) $k<0$; $b>0$; з) $k<0$; $b=0$.

12. а) $k_1=k_2$; $b_1>b_2$; б) $k_1>k_2$; $b_1=b_2$; в) $k_1=k_2$; $b_1<b_2$; г) $k_1<k_2$; $b_1>b_2$; д) $k_1>k_2$; $b_1>b_2$; е) $k_1<k_2$; $b_1<b_2$; ж) $k_1>k_2$; $b_1<b_2$; з) $k_1<k_2$; $b_1=b_2$.

13. а) Нет; б) да; в) да; г) да.

14. б).

15. Нет.

19. а) Справедлива; б) $y=y_1$; в) $x=x_1$.

К параграфу 2.4

6. а) 196; в) 225; е) 144; з) 289.

7. а) $-1{,}96$; в) $0{,}01$; е) $108{,}16$; з) $11{,}6281$.

8. а) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{1}{81}$; е) $\frac{100}{9}$; з) $\frac{49}{4}$.

9. в), г), е), ж), з).

10. а) $3{,}2^2<3{,}4^2$; в) $0{,}01^2<0{,}02^2$; е) $7{,}8^2<7{,}9^2$; з) $2{,}2^2>1{,}9^2$.

11. а) $y(u)<y(v)$; б) $y(u)>y(v)$; в) $y(u)>y(v)$; г) $y(u)<y(v)$.

12. а), в), г), з).

13. Она является чётной.

14. При всех значениях аргумента эта функция принимает значение 0.

К параграфу 2.5

9. а) 1; в) $\frac{1}{2}$; е) 16; з) 12.

10. а) $-\frac{1}{2}$; в) -3; е) -4; з) 9.

11. в), г), д), ж).

12. в).

13. а) $y(u) > y(v)$; б) $y(u) > y(v)$; в) $y(u) < y(v)$; г) $y(u) < y(v)$.

14. а) $y(x_1) > y(x_2)$; б) $y(x_1) > y(x_2)$; в) $y(x_1) > y(x_2)$; г) $y(x_1) < y(x_2)$.

16. а) Нет; б) нет; в) нет; г) да, при $k < 0$.

17. а) $k_1 > 0, k_2 < 0$; б) $k_1 < 0, k_2 < 0$.

18. Нет.

19. а) $k_2 < k_1$; б) $k_2 > k_1$.

21. а), г), д), ж).

22. Она является нечётной.

23. Графики функций $y = \frac{4}{|x|}$ и $y = \left|\frac{4}{x}\right|$ совпадают (рис. 42 а). График функции $y = -\frac{4}{|x|}$ изображён на рис. 42 б.

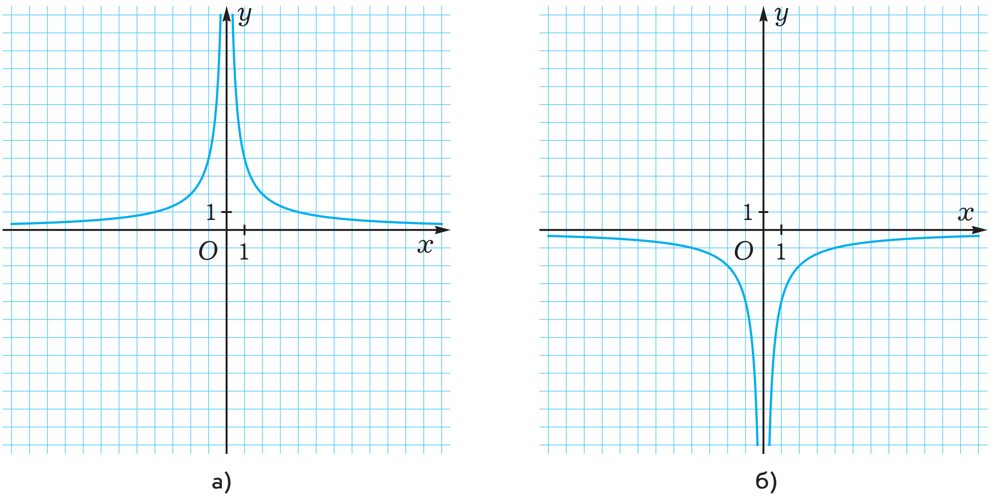


Рис. 42

24. Её осями симметрии являются прямые $y = x$ и $y = -x$.

25. Прямая, совпадающая с осью абсцисс, из которой исключена точка $(0;\ 0)$.

К параграфу 3.1

4. а) Два решения; б) не имеет решений; в) одно решение; г) два решения.

5. а) Нет; б) да; в) да; г) да; д) нет; е) да.

6. а), е), з).

7. а) 8; б) 14; в) 0,3; г) -4; д) 11; е) 1,1; ж) 8; з) 0,07.

8. а) 9; б) -10; в) 1; г) 3; д) 48; е) 0; ж) 14; з) 2,4.

9. а) 5; б) 21; в) 44; г) 6; д) -6; е) $\frac{2}{25}$; ж) 28; з) $\frac{8}{5}$.

10. а) 1; б) -3; в) 8.

11. а) $a \geqslant 0$; б) $b \leqslant 0$; в) $c \geqslant 0$; г) $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

12. а) $\sqrt{2} < \sqrt{3}$; в) $\sqrt{7} < 3$; е) $\sqrt{\frac{6}{7}} < \sqrt{\frac{20}{23}}$; з) $\sqrt{6{,}25} = 2\frac{1}{2}$.

13. а) 2 и 3; б) 4 и 5; в) 7 и 8; г) 10 и 11; д) 14 и 15; е) 20 и 21.

14. а) $x = 7$ или $x = -7$; б) нет решений; в) $x = \sqrt{5}$ или $x = -\sqrt{5}$; г) $x = \sqrt{0{,}3}$ или $x = -\sqrt{0{,}3}$.

15. а) $x = 19$; б) $x = 49$; в) $z = 169$; г) $y = -24$.

16. а) $\sqrt{2}$; б) 3; в) 1; г) 2.

17. а) $x = 0$ или $x = 1$; б) $x = 0$ или $x = \frac{1}{25}$; в) нет решений; г) $x = 1$.

К параграфу 3.2

4. а) 1,7; б) 2,6; в) 3,7; г) 9,4.

5. а) 1,732; б) 2,646; в) 3,742; г) 9,434.

6. а) 7,94; б) 0,21; в) 2,82; г) 0,47.

7. а) 19; б) 37; в) 25; г) 4,2.

8. а) $x = \sqrt{20} \approx 4{,}5$ или $x = -\sqrt{20} \approx -4{,}5$; б) $x = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}6$ или $x = -\sqrt{2{,}5} \approx -1{,}6$; в) $x = \sqrt{530} \approx 23{,}0$ или $x = -\sqrt{530} \approx -23{,}0$; г) $x = \sqrt{8282} \approx 91{,}0$ или $x = -\sqrt{8282} \approx -91{,}0$.

10. а), б), в), г), е).

12. Может.

К параграфу 3.3

6. а) 4; в) 0,3; е) 0,2; з) 0,12.

7. а) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{4}{5}$; е) 20; з) 0,9.

8. а), г), д), ж), з).

9. а) $\sqrt{6} < \sqrt{7}$; в) $\sqrt{0{,}4} > \sqrt{0{,}3}$; е) $\sqrt{77} < 9$; з) $\sqrt{17} > \sqrt{12}$.

10. а) $y(u) > y(v)$; б) $y(u) < y(v)$; в) $y(u) < y(v)$; г) $y(u) < y(v)$.

11. а) $\sqrt{11}$, 4, $\sqrt{17{,}1}$; б) $\sqrt{21}$, $\sqrt{22}$, 5; в) $\sqrt{120}$, 12, $\sqrt{145}$; г) 4, $\sqrt{25}$, $\sqrt{52}$.
12. а) $(16;\ 4)$; б) не пересекается; в) $(196;\ 14)$; г) $(0;\ 0)$.
13. а) Не пересекается; б) $(1;\ 1)$; в) $(0;\ 0)$ и $(9;\ 3)$; г) $(1;\ 1)$ и $(4;\ 2)$.
14. а) $x = 0$ или $x = 1$; б) нет решений; в) $x = \frac{9}{4}$; г) $x = 4$.
15. См. рис. 43: а) синий график; б) красный график; в) чёрный график.

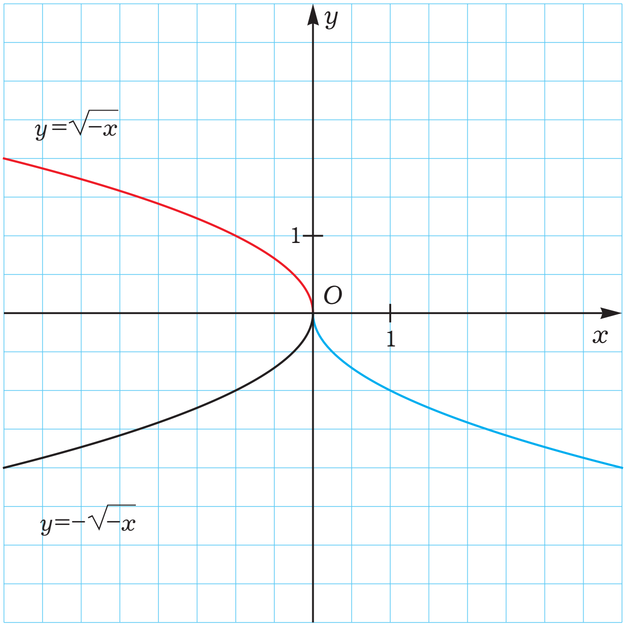


Рис. 43

К параграфу 3.4

3. а) 63; в) 0,09; е) 70; з) 44,1.

4. а) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{9}{10}$; е) $\frac{8}{7}$; з) $\frac{7}{6}$.

5. а) $\frac{35}{54}$; в) $\frac{216}{385}$; е) $\frac{21}{4}$; з) $\frac{52}{15}$.

6. а) 135; в) 90; е) 0,3; з) 0,072.
7. а) 10; в) 7; е) 0,4; з) 15.

8. а) 3; в) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{13}{3}$; з) $\frac{1}{3}$.

9. а) 42; б) 7; в) 110; г) $\frac{1}{7}$.

10. а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; в) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$; е) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{35}\cdot\sqrt{2}$; з) $\sqrt{11}\cdot\sqrt{13}$.

11. а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; в) например, $\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{2}}$; е) например, $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$; з) $\sqrt{19}:\sqrt{\frac{1}{g}}=\sqrt{g}:\sqrt{\frac{1}{19}}$.

12. а) 7; в) 21; д) 25.

13. а) 9,5; в) 4; е) $2^5=32$; з) $9^2=81$.

14. а) $5^2=25$; в) $2^4=16$.

15. а) n; в) $5|t|$; е) $-|k|$; з) $j+j^2$.

16. а) x^2; в) u^4.

17. а) $|x-1|$; в) m^2+2.

18. а) 80; б) 9000; в) 0,06; г) 0,007.

19. а) $\sqrt{2}-1$; б) $1+\sqrt{3}$; в) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$; г) $3-\sqrt{7}$.

20. а) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{-a}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-c}}$; г) $\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{11}}$.

21. Всегда.

К параграфу 3.5

4. а) $2\sqrt{7}$; в) $5\sqrt{7}$; е) $5\sqrt{6}$; з) $\frac{2}{7}\sqrt{5}$.

5. а) $\sqrt{48}$; в) $\sqrt{184}$; е) $\sqrt{14}$; з) $\sqrt{\frac{81}{50}}$.

6. а) $7\sqrt{6}$; в) $5\sqrt{2}$.

7. а) $-2\sqrt{a}$; в) $13\sqrt{c}-8\sqrt{m}$.

8. а) $-\sqrt{5}$; в) $12\sqrt{7}$; е) $7\sqrt{2}$; з) $5\sqrt{5}$.

9. а) $-3\sqrt{\frac{2}{5}}$; в) $\sqrt{\frac{5}{2}}$; е) $\frac{9}{\sqrt{2}}$; з) $\sqrt{11}$.

10. а) $\sqrt{14a^2}$; б) $-\sqrt{5b^2}$; в) $\sqrt{2c^4}$; г) $-\sqrt{2d^8}$; д) $\sqrt{14x^6}$; е) $\sqrt{21y^{10}}$.

11. а) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; в) $\sqrt{15}$; е) $3\sqrt{0,3}$; з) $12\sqrt{2}$.

12. а) $\frac{5}{c}\sqrt{c}$; в) $\frac{p}{q}\sqrt{2q}$; е) $\frac{\sqrt{2k^3}}{4k^2}$; з) $\frac{m+n}{m-n}\sqrt{m-n}$.

13. а) $\sqrt{11}-3$; в) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$; д) $a\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

14. а) $\sqrt{5}-2$; в) $3+2\sqrt{2}$; е) $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{s}$; з) $-3\sqrt{2}\left(\sqrt{11}+1\right)$.

15. а) $\sqrt{5}-1$; в) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; е) $\sqrt{\frac{5}{7}}$; з) $\frac{\sqrt{14}}{3}$.

16. а) $1+\sqrt{a}$; в) $\frac{1}{5\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$; з) $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}$.

17. а) $-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$; б) 1; в) $\frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}$; г) $\frac{\sqrt{h+1}+\sqrt{1-h}}{2}$; д) $1+m$; е) 2; ж) 1; з) $\frac{1}{1-k}$.

18. а) $a\sqrt{5}$; б) $-b^3\sqrt{2}=|b|^3\sqrt{2}$; в) $c^2\sqrt{3}$; г) $-3d\sqrt{7d}$; д) $\frac{1}{n}\sqrt{m}$; е) $-\frac{z^2}{|y|}\sqrt{z}$.

20. а) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}-2\right)$; б) $\frac{1}{23}\left(3-4\sqrt{2}-16\sqrt{3}+6\sqrt{6}\right)$; в) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)$;
г) $\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{11}$.

21. а) 39; б) $4+\frac{56}{3}\sqrt{10}$; в) 132; г) $\frac{(3p+q)(p+3q)}{(p-q)^2}$.

22. а) $\frac{(m+n)^2}{(m-n)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)}$, $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$, $m\neq n$; б) $u+v$, $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$ и $u\neq v$;
в) $\frac{a+b-\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$; г) $\frac{8+10z+4z^2}{5z+2z^2}$, $-\frac{1}{2}\leqslant z<0$ или $z>0$.

23. а) 0; б) $7-2\sqrt{10}$; в) 17; г) $13+10\sqrt{2}$.

24. а) $1+\sqrt{3}$; б) $2-\sqrt{3}$; в) $\sqrt{15}-1$; г) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; д) $1+2\sqrt{6}$; е) $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

25. а) $\sqrt{5}-2$; б) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-2\right)$; в) 6; г) 0.

К параграфу 4.1

4. а) 1 и 2; в) 3 и -4; е) 0,25 и -2; з) $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{2}$.

5. а) 0 и 2; в) 0 и $-0{,}75$; е) $\pm\sqrt{3}$; з) 0.

6. а) 0 и 1; в) 0 и 2,4; е) $\pm 2\sqrt{2}$; з) $\pm\sqrt{2}$.

7. а) 1; в) -1; е) 0,25; з) -2.

8. а) 0 и 0,4; в) 0 и 1,5; е) 0 и ± 3; з) ± 2.

9. -42.

10. -4.

11. 1.

12. $1\frac{2}{3}$.

13. а) 0 и 1; в) 0; е) ± 3; з) $\pm\sqrt{6}$.

14. а) Нет корней; в) 1 и 5; е) 1 и $-\frac{1}{3}$; з) -2.

15. а) $x^2-3x+2=0$; в) $2x^2-x-1=0$.

16. а) 1 и 2; в) 1 и $1\frac{1}{4}$.

17. а) -3; в) ± 3.

К параграфу 4.2

2. а) 1; в) 4; е) ± 10; з) $\pm 2\sqrt{7}$.
3. а) ± 9 в) $\pm 2{,}25$; е) 0 и 6; з) нет корней.
4. а) 0 и 4; в) 0 и 1; е) нет корней; з) 0,5 и $-3{,}5$.
5. а) нет корней; в) -2 и -4; е) -1 и 2; з) 1 и -6.
6. а) 6 и 8; в) нет корней; е) -2 и -9; з) 1 и -16.
7. а) -1 и $\frac{3}{4}$; в) 1 и $\frac{1}{2}$; е) -2 и 1,5; з) 2 и $-2{,}75$.

8. а) 5; в) $\frac{1}{3}$; е) 2; з) корней нет;

9. а) -1 и -5; в) 0 и 3.
10. а) Корней нет; в) ± 1 и ± 3.
11. а) ± 1; в) ни при каких.
12. а) 1; в) -1.

К параграфу 4.3

2. а) 52, 2 корня; в) -104, корней нет; е) 0, 1 корень; з) -16, корней нет.
4. а) 2 и 4; в) 3 и 6; е) корней нет; з) 5 и -3.
5. а) 2 и 1,5; в) -2 и $-0{,}5$; е) -5 и $1\frac{1}{3}$; з) корней нет.

6. а) 6 и -1; в) 5 и -1; е) 2 и 2,5; з) 2 и $1\frac{1}{3}$.

7. а) 2 и 6; в) 3 и 7; е) 2 и $-1\frac{3}{8}$; з) 5 и $-0{,}25$.

8. а) $1\pm\sqrt{2}$; в) $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$; е) нет корней; з) $\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}$.

9. а) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$; е) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; з) $\sqrt{3}$ и $\frac{-1-3\sqrt{3}}{3}$.

10. а) ± 6; в) $\pm\sqrt{3}$.

11. а) -1; 2 и 3; в) ± 1.

14. а) -3; в) 2.

15. а) -2; в) $-\frac{1}{7}$.

16. а) 1; в) $1\frac{7}{9}$.

К параграфу 4.4

3. а) -3; в) -7; е) $-2{,}5$; з) $-3{,}5$.

6. а) $x^2-5x+6=0$; в) $x^2-x=0$; е) $x^2+11x+24=0$; з) $x^2-18x+77=0$.

7. а) Нет корней; в) $x^2-3x+1=0$; е) нет корней; з) $2x^2+3x-7=0$.

8. а) $5x^2-x-1=0$; в) $x^2-3x-1=0$; е) $x^2-x-5=0$; з) $7x^2+3x-2=0$.

10. $q<0$.

11. а) Корней нет; в) 19; е) 0,25; з) корней нет.

12. а) $2x^2-7x+6=0$; в) $25x^2-45x-232=0$; е) $2x^2+3x-9=0$;
з) $x^2-2x+2=0$.

13. а) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}-2$; в) $\sqrt{5}$ и $\frac{4}{3}-\sqrt{5}$.

14. а) $x^2-3x+1=0$.

15. а) -24; в) $1\frac{23}{49}$.

16. а) 95; в) $5\frac{5}{8}$.

17. а) $x^2-2x-2=0$; в) $x^2-4x-2=0$.

18. $3x^2-17x+16=0$.

19. $p=-7$, $x_2=-2$.

20. $q=-7$, $x_2=1$.

К параграфу 4.5

2. а) $(x-1)(x-7)$; в) $(x+1)(4-x)$; е) $(x-3)(x+5)$; з) $(x+2)(x+7)$.

3. а) $(x-1)(3x+2)$; в) $(x+1)(5-2x)$; е) $(2x-3)^2$; з) $(x-2)(2x+1)$.

4. а) $\frac{1}{a+1}$; в) $2-a$; е) $\frac{b+3}{b-6}$; з) $\frac{6b}{b+5}$.

5. а) $\frac{a-5}{a+10}$; в) $\frac{5a-3}{a-2}$; е) $\frac{3b-1}{7b-5}$; з) $\frac{6b-13}{2b-9}$.

6. $b=-1$, $(3x+2)(x-1)$.

7. а) $(x-a)(x-b)$; в) $(x+2a)(x+a^2)$.

8. а) $(a-b)(a+2b)$; в) $(p-2q)(3p+8q)=0$.

9. а) $3-\sqrt{a}$; в) $\sqrt{a}+1$.

10. а) $\frac{2-3a}{1+b}$; в) $\frac{4a-1}{b-1}$.

К параграфу 4.6

1. 13 и 14.

3. 20%.

5. 16, 17 и 18.

7. 17.

9. 5 см.

11. 5 см и 12 см.

13. 12 и 3.

15. 12.

17. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \approx 29\%$.

К параграфу 5.1

2. а) ± 1 и $-1{,}5$; в) 1 и -2; е) 2 и -3; з) 2 и $-2{,}5$.

3. а) 0; 2 и 3; в) 0; $2-5$; е) ± 1; з) 1 .

4. а) ± 1 и $\pm\sqrt{6}$; в) корней нет; е) ± 1; з) $\pm\sqrt{2}$ и $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. а) $-2\pm\sqrt{3}$; в) 0; -2; е) 0 и 1; з) 0 и 1.

6. а) $x^4+x^2+1=0$; в) $x^4+x^2-2=0$.

7. а) $\frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$; в) 1 и -4.

8. а) 2; 0,5 и -1; в) 2 и 6,5.

9. а) 0; 1 и -3; в) ± 1 и 2.

10. а) 5; -6 и $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; в) 1 и -4.

11. а) 1 и -3; в) 0; -1 и $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

К параграфу 5.2

2. а) 26; в) ± 1; е) $-0,8$; з) -2 и 4.

3. а) 0; в) -1; е) 0 и $-0,25$; з) 1.

4. а) 2 и 0,5; в) 20 и 21; е) -3 и 0,5; з) $\frac{4}{7}$ и $-\frac{1}{3}$.

5. а) -1; в) $\frac{2}{3}$; е) -1 и 2; з) 1 и $\frac{1}{2}$.

6. а) -3 и 8; в) -1 и 5,5; е) 7 и $-3\frac{1}{3}$; з) 10 и -8.

7. а) -3 и $\frac{2}{3}$; в) -5; е) 9 и 10; з) 6.

8. а) 1 и $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{9}$; е) 0 и $\frac{7}{3}$; з) ± 2.

9. а) ± 2; в) ± 6.

10. а) 2; в) 2 и 0,4.

11. а) 3 и 0,5; в) -1.

12. а) 3 и $1\frac{2}{3}$; в) $1\frac{3}{7}$.

13. а) Корней нет; в) 1; -2 и $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

14. а) 2; -7; в) 0; -2.

К параграфу 5.3

1. $\frac{3}{4}$.

3. 12 км/ч.

5. 40 км/ч.

7. 4 км/ч.

9. 60 км/ч.

11. 3 км/ч.

13. 5 ч и 7 ч 30 мин.

15. 40 пистолей или 60 пистолей.

К параграфу 6.1

4. а) $\frac{38}{5}$; 2; 8; 8; б) $-\frac{2}{5}$; 10; 0; 1; в) $\frac{17}{4}$; 5; 5; 5; г) 1; 39; 0; 18; д) $\frac{25}{4}$; 9; 7; 4,7 и 9;
е) 5,3; 7,6; 6; 6; ж) 5,39; 6,8; 6,05; 1,9; з) $\approx$10,613; 17,13; 11,04; не существует.

5. а) $\frac{104}{7} \approx 14{,}9$ °С; б) 16.

6. а) $\frac{313}{7} \approx 44{,}7$ млн т; б) 13 млн т; в) 47 млн т; г) 49 млн т.

7. а) $\frac{91}{12} \approx 7{,}6$ л; б) 3 л; в) 7,25 л.

8. а) $\frac{69}{5} = 13{,}8$ см; б) $\frac{138}{25} = 5{,}52$ года; в) 10 см, 5 см, 35 см.

9. а) $\frac{9}{2} = 4{,}5$ буквы; б) 4 буквы; в) 4 буквы; г) 3 буквы.

10. Не более 5.

11. а) Да; б) да; в) да.

12. а) Да; б) да; в) да.

13. а) Да; б) да; в) да.

14. а) Нет; б) нет; в) да.

15. а) Да; б) нет; в) да.

16. $\frac{n+1}{2}$.

17. $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}+1$.

18. а) Да. Среднее равно 2,56; б) нет; в) нет.

К параграфу 6.2

5. $\frac{271}{60} \approx 4{,}52$; 8; 6; 5.

6. Частоты: 5; 7; 9; 8; 7; 8; 8; 7; 6; 7. $\frac{469}{72} \approx 6{,}51$; 9; 4; $\frac{13}{2} = 6{,}5$.

7. 3,053; 2; 2,4 и 3,5; 3,25.

8. Относительные частоты: 0,219; 0,364; 0,254; 0,086; 0,061; 0,013; 0,003.
Накопленные частоты: 1312; 3493; 5018; 5536; 5900; 5980; 6000.
Мода — 1 цифра, медиана — 1 цифра.

9. $\frac{86}{25} = 3{,}44$ очка; относительные частоты — 0,173; 0,150; 0,193; 0,200; 0,113; 0,170; накопленные частоты — 52; 97; 155; 215; 249; 300.

10. $\frac{9597}{236} \approx 40{,}66$; 41; 42.

11. См. рис. 44.

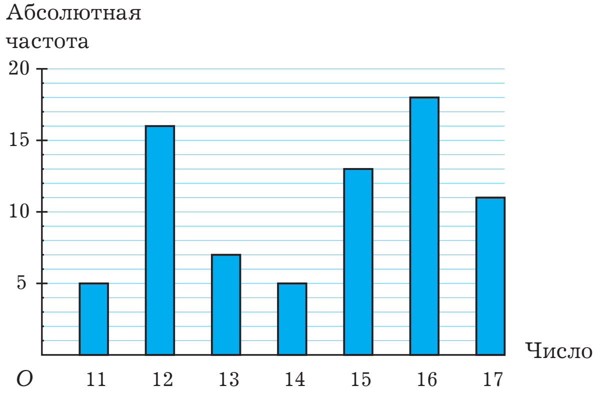


Рис. 44

12. См. рис. 45.

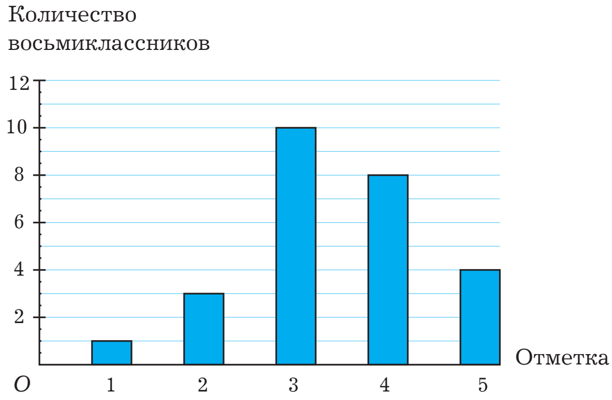


Рис. 45

13.

Год проведения зимних Олимпийских игр	1994	1998	2002	2006	2010
Количество золотых медалей, завоёванных сборной России	11	9	5	8	3

17. См. рис. 46 и 47.

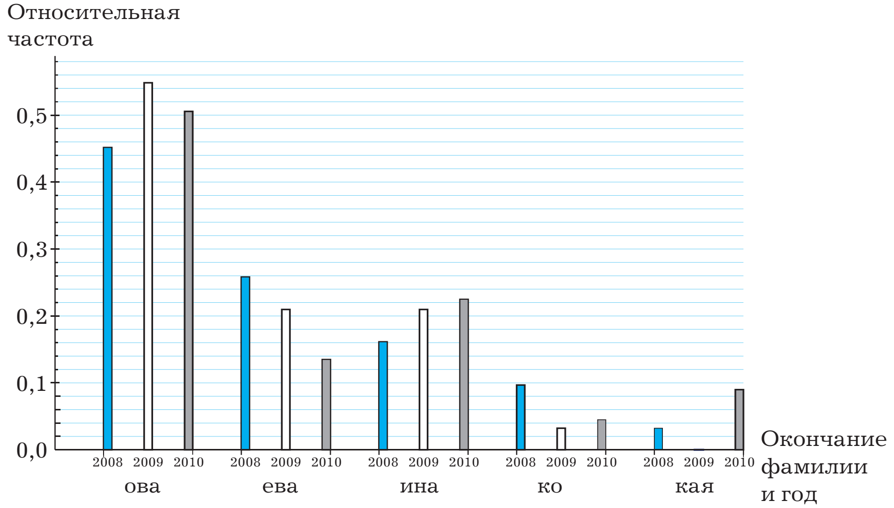


Рис. 46

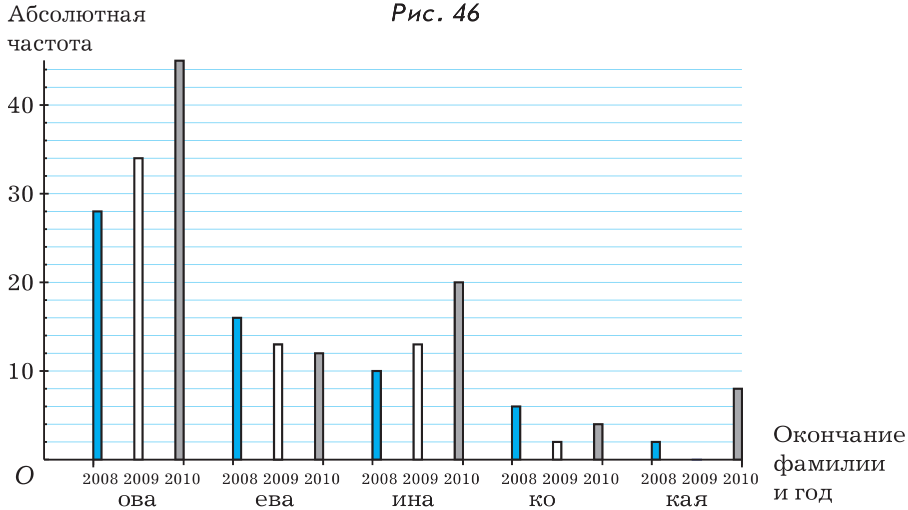


Рис. 47

К параграфу 6.3

4. См. рис. 48.

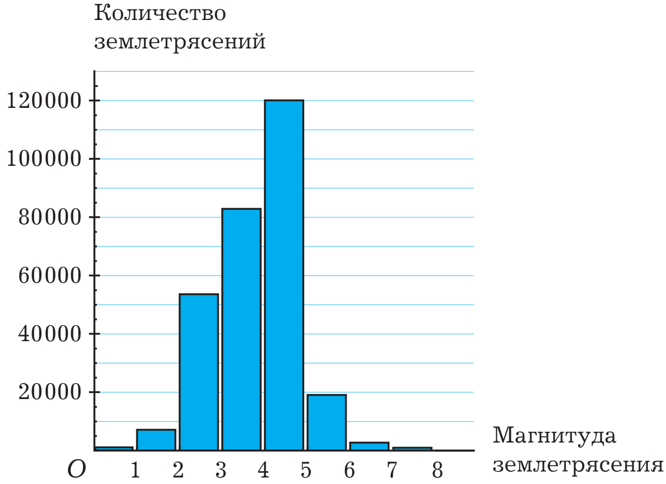


Рис. 48

5. См. рис. 49.

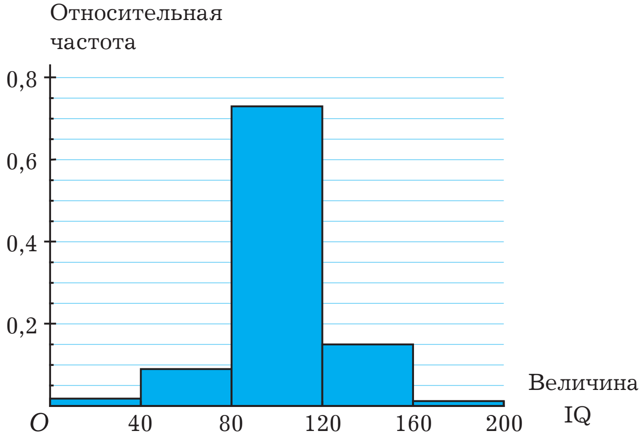


Рис. 49

6. $\frac{3743}{137} \approx 27{,}32$ см.

7. 13,1 кг.

СОДЕРЖАНИЕ

Как работать с учебником 3

ГЛАВА I. Рациональные алгебраические выражения
1.1. Дробные алгебраические выражения 7
1.2. Алгебраические дроби 14
1.3. Сложение и вычитание алгебраических дробей 20
1.4. Умножение и деление алгебраических дробей 31
1.5. Тождественные преобразования рациональных
алгебраических выражений 39
1.6. Степень с целым показателем 50

ГЛАВА II. Понятие о функциях
2.1. Функции 61
2.2. Графики функций 68
2.3. Линейная функция и её график 78
2.4. Функция $y = x^2$ и её график 86
2.5. Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график 90

ГЛАВА III. Квадратные корни
3.1. Понятие о квадратном корне и об арифметическом квадратном корне . 100
3.2. Приближённое извлечение арифметических квадратных корней 106
3.3. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график 110
3.4. Свойства арифметических квадратных корней 115
3.5. Преобразование выражений, содержащих
арифметические квадратные корни 121

ГЛАВА IV. Квадратные уравнения
4.1. Квадратные уравнения. Примеры решения квадратных уравнений 133
4.2. Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата . 138
4.3. Формула корней квадратного уравнения 142
4.4. Теорема Виета 147
4.5. Разложение выражения $ax^2 + bx + c$ на множители 152
4.6. Решение задач 156

ГЛАВА V. Рациональные уравнения
5.1. Целые рациональные уравнения 159
5.2. Дробные рациональные уравнения 163
5.3. Решение задач 168

ГЛАВА VI. Элементы статистики

6.1. Статистические характеристики 173
6.2. Таблицы частот 180
6.3. Понятие об интервальном методе 188

Задания для повторения

К главе I. Рациональные алгебраические выражения 195
К главе II. Понятие о функциях 200
К главе III. Квадратные корни 204
К главе IV. Квадратные уравнения 209
К главе V. Рациональные уравнения 211
К главе VI. Элементы статистики 215

Ответы

К параграфу 1.1 217
К параграфу 1.2 217
К параграфу 1.3 218
К параграфу 1.4 219
К параграфу 1.5 221
К параграфу 1.6 221
К параграфу 2.1 222
К параграфу 2.2 223
К параграфу 2.3 224
К параграфу 2.4 224
К параграфу 2.5 224
К параграфу 3.1 225
К параграфу 3.2 226
К параграфу 3.3 226
К параграфу 3.4 227
К параграфу 3.5 228
К параграфу 4.1 229
К параграфу 4.2 230
К параграфу 4.3 230
К параграфу 4.4 231
К параграфу 4.5 232
К параграфу 4.6 232
К параграфу 5.1 232
К параграфу 5.2 233
К параграфу 5.3 233
К параграфу 6.1 234
К параграфу 6.2 234
К параграфу 6.3 237

Рубин Александр Григорьевич
Чулков Павел Викторович

АЛГЕБРА
8 класс

Концепция оформления и художественное редактирование — *Е.Д. Ковалевская*

Подписано в печать 16.03.15. Формат 70×90/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Журнальная.
Объём 15 п. л. Тираж 4000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 – литература учебная

Издательство «Баласс». 109147 Москва, Марксистская ул., д. 5, стр. 1
Почтовый адрес: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс»
Телефоны для справок: (495) 368-70-54, 672-23-12, 672-23-34
http://www.school2100.ru E-mail: izd@balass.su

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство "Высшая школа"»
214020 Смоленск, ул. Смольянинова, 1